Corrigé de E3A 2009 PC math A

Questions de cours

1. Montrons que toute matrice C s'écrit de manière unique $C = S + A$ avec $S \in S_3(\mathbb{R})$ et $A \in A_3(\mathbb{R})$.
Unicité: si $C = S + A$ avec $S \in S_3(\mathbb{R})$ et $A \in A_3(\mathbb{R})$ alors ${}^tC = {}^tS + {}^tA = S - A$ d'où $S = \frac{1}{2}(C + {}^tC)$ et $A = \frac{1}{2}(C - {}^tC)$.
Existence: pour $C \in M_3(\mathbb{R})$, posons $S = \frac{1}{2}(C + {}^tC)$ et $A = \frac{1}{2}(C - {}^tC)$. On vérifie que $S \in S_3(\mathbb{R})$, que $A \in A_3(\mathbb{R})$ et que $C = S + A$.

2. Si $\text{rang}(S) \leqslant 2$ alors la dimension du noyau est au moins égale à 1 donc 0 est valeur propre. Comme S est symétrique réelle elle est diagonalisable dans une base orthonormale et donc semblable à $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ puisque l'une au moins des valeurs propres est nulle. Si la base est indirecte on change l'un des vecteurs en son opposé pour obtenir une base orthonormale directe, cela ne change pas la matrice D.
Application: S est symétrique de rang 2, $\det(S - xI_3) = -x^3 + 2x$ donc $\beta = \sqrt{2}$ et $\gamma = -\sqrt{2}$. On obtient sans difficulté une base orthonormale directe b convenable: $M_{b_0}(b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
On calcule $S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $S^3 = 2S$. Par récurrence : $S^{2m+1} = 2^m S$ et $S^{2m+2} = 2^m S^2$.

Partie I

1. (a) L'application nulle de $E \times E$ dans E est bien bilinéaire, antisymétrique et vérifie la dernière condition d'un crochet de Lie.

   (b) $(A, B) \mapsto [A, B] = AB - BA$ est une application bilinéaire. Elle est antisymétrique: $[B, A] = BA - AB = -(AB - BA) = -[A, B]$. Enfin, $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = A(BC - CB) - (BC - CB)A + B(CA - AC) - (CA - AC)B + C(AB - BA) - (AB - BA)C = 0$. C'est donc un crochet de Lie sur $E = M_n(\mathbb{R})$.
   C'est aussi un crochet de Lie sur $E = A_n(\mathbb{R})$ car si A et B sont antisymétriques alors $[A, B] = AB - BA$ l'est aussi: ${}^t(AB - BA) = (-B)(-A) - (-A)(-B) = BA - AB = -[A, B]$.
   Ce n'est pas un crochet de Lie sur $E = S_n(\mathbb{R})$ car si A et B sont symétriques alors ${}^t(AB-BA) = BA - AB \neq -[A, B]$ si $AB \neq BA$. Par exemple pour $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on obtient $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. (a) $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\vec{w} + (\vec{v}.\vec{u})\vec{w} - (\vec{v}.\vec{w})\vec{u} + (\vec{w}.\vec{v})\vec{u} - (\vec{w}.\vec{u})\vec{v} = 0$.
   Comme l'application $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \wedge \vec{v}$ est bilinéaire antisymétrique de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ c'est donc bien un crochet de Lie.

   (b) i. $\Psi_{\vec{a}}$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
   ii. $\text{Ker}(\Psi_{\vec{a}}) = \text{Vect}(\vec{a})$ est de dimension 1 (car $\vec{a} \neq 0$) donc $\text{rang}(\Psi_{\vec{a}}) = 3 - 1 = 2$.
   iii. On calcule $\Psi_{\vec{a}}(\vec{i}) = \alpha\vec{i} \wedge \vec{i} + \beta\vec{j} \wedge \vec{i} + \gamma\vec{k} \wedge \vec{i} = -\beta\vec{k} + \gamma\vec{j}$ et de même $\Psi_{\vec{a}}(\vec{j})$ et $\Psi_{\vec{a}}(\vec{k})$ d'où: $A_{\vec{a}} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$. C'est bien une matrice antisymétrique.

iv. $\det(A_{\vec{a}} - xI_3) = -x^3 - (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)x$.

v. Comme $\vec{a} \neq 0$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 > 0$ et donc $A_{\vec{a}}$ a deux valeurs propres complexes non réelles: elle n'est pas diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.

vi. Si $A = (a_{i,j})$ est antisymétrique alors $a_{i,i} = a_{j,j} = a_{k,k} = 0$ et $a_{i,j} = -a_{j,i}$. L'unique vecteur $\vec{a}$ est donc défini par $\alpha = a_{3,2} = -a_{2,3}$, $\beta = a_{1,3} = -a_{3,1}$ et $\gamma = a_{2,1} = -a_{1,2}$.

Partie II

1. (a) Si la famille $(\vec{u},\vec{v})$ est liée on a par exemple $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ donc $[\vec{u},\vec{v}] = \lambda[\vec{u},\vec{u}] = 0$ puisque $[\vec{u},\vec{u}] = -[\vec{u},\vec{u}]$ par antisymétrie.

   (b) La réciproque est fausse pour les exemples du I.1 ; pour le I.1b si $A = I_n$ et $B \neq \lambda I_n$, $[A,B] = 0$. Cependant la réciproque est vraie pour l'exemple du I.2a : $[\vec{u},\vec{v}] = \vec{u}\wedge\vec{v} = 0$ est équivalent à $(\vec{u},\vec{v})$ liée.

2. (a) Comme E est de dimension 1, tout couple $(\vec{u},\vec{v})$ est une famille liée donc $[\vec{u},\vec{v}] = 0$ d'après la question précédente.

   (b) Le seul crochet de Lie est donc l'application nulle.

3. (a) Par bilinéarité $[\vec{x},\vec{y}] = x_1y_1[\vec{u}_0,\vec{u}_0] + x_1y_2[\vec{u}_0,\vec{v}_0] + x_2y_1[\vec{v}_0,\vec{u}_0] + x_2y_2[\vec{v}_0,\vec{v}_0]$. Par antisymétrie $[\vec{x},\vec{y}] = (x_1y_2 - x_2y_1)[\vec{u}_0,\vec{v}_0] = \det_B(\vec{x},\vec{y})\vec{k}_0$.

   (b) i. Si $\operatorname{rang}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \leqslant 1$ l'égalité est immédiate car les trois déterminants sont nuls. Si $\operatorname{rang}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 2$ on a par exemple $(\vec{u},\vec{v})$ libre, c'est donc une base de E et $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. $\det_B(\vec{u},\vec{v})\vec{w} + \det_B(\vec{v},\vec{w})\vec{u} + \det_B(\vec{w},\vec{u})\vec{v} = \det_B(\vec{u},\vec{v})\vec{w} + \alpha\det_B(\vec{v},\vec{u})\vec{u} + \beta\det_B(\vec{v},\vec{u})\vec{v} = \det_B(\vec{u},\vec{v})(\vec{w} - \alpha\vec{u} - \beta\vec{v}) = 0$.

   ii. $[\vec{u},[\vec{v},\vec{w}]] = [\vec{u},\det_B(\vec{v},\vec{w})\vec{k}] = [\det_B(\vec{v},\vec{w})\vec{u},\vec{k}]$ par bilinéarité.

   iii. L'application définie par $[\vec{x},\vec{y}] = \det_B(x,y)\vec{k}$ est clairement une application bilinéaire antisymétrique de $E\times E$ dans E puisque le déterminant est bilinéaire antisymétrique. De plus on a $[\vec{u},[\vec{v},\vec{w}]] + [\vec{v},[\vec{w},\vec{u}]] + [\vec{w},[\vec{u},\vec{v}]] = [\det_B(\vec{v},\vec{w})\vec{u},\vec{k}] + [\det_B(\vec{w},\vec{u})\vec{v},\vec{k}] + [\det_B(\vec{u},\vec{v})\vec{w},\vec{k}] = [\det_B(\vec{v},\vec{w})\vec{u} + \det_B(\vec{w},\vec{u})\vec{v} + \det_B(\vec{u},\vec{v})\vec{w},\vec{k}] = [0,\vec{k}] = 0$. On a donc bien un crochet de Lie.

   (c) Les crochets de Lie sur E sont donc les applications définies par $[\vec{x},\vec{y}] = \det_B(\vec{x},\vec{y})\vec{k}$ où $\vec{k}$ est un vecteur fixé. On peut remarquer que si $\vec{k} \neq 0$: $[\vec{x},\vec{y}] = 0$ si et seulement si $(\vec{x},\vec{y})$ est liée.

Partie III

1. (a) i. $[\vec{x},\vec{y}] = [x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}, y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}] = x_1y_1[\vec{i},\vec{i}] + x_1y_2[\vec{i},\vec{j}] + x_1y_3[\vec{i},\vec{k}] + x_2y_1[\vec{j},\vec{i}] + x_2y_2[\vec{j},\vec{j}] + x_2y_3[\vec{j},\vec{k}] + x_3y_1[\vec{k},\vec{i}] + x_3y_2[\vec{k},\vec{j}] + x_3y_3[\vec{k},\vec{k}] = (x_1y_2 - x_2y_1)[\vec{i},\vec{j}] + (x_1y_3 - x_3y_1)[\vec{i},\vec{k}] + (x_2y_3 - x_3y_2)[\vec{j},\vec{k}] = (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{c_1} + (x_3y_1 - x_1y_3)\vec{c_2} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{c_3}$.

   ii. Avec $\vec{c_1} = \varphi_C(\vec{i})$, $\vec{c_2} = \varphi_C(\vec{j})$, $\vec{c_3} = \varphi_C(\vec{k})$ et la linéarité de φ_C on obtient $[\vec{x},\vec{y}] = \varphi_C((x_2y_3 - x_3y_2)\vec{i} + (x_3y_1 - x_1y_3)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}) = \varphi_C(\vec{x}\wedge\vec{y})$.

   iii. $f = \varphi_C$ est un endomorphisme qui convient. Il est unique car il doit vérifier $f(\vec{i}) = f(\vec{j}\wedge\vec{k}) = [\vec{j},\vec{k}] = \vec{c_1}$ et de même $f(\vec{j}) = \vec{c_2}$ et $f(\vec{k}) = \vec{c_3}$.

   (b) i. D'après le I.2.b.vi le vecteur $2\vec{a}$ associé à la matrice $2A_{\vec{a}} = C -^t C$ a pour coordonnées $c_{3,2} - c_{2,3}$, $c_{1,3} - c_{3,1}$ et $c_{2,1} - c_{1,2}$.

ii. $\vec{i} \wedge \vec{c_1} = c_{2,1}\vec{k} - c_{3,1}\vec{j}$, $\vec{j} \wedge \vec{c_2} = c_{3,2}\vec{i} - c_{1,2}\vec{k}$ et $\vec{k} \wedge \vec{c_3} = c_{1,3}\vec{j} - c_{2,3}\vec{i}$ donc $\vec{i} \wedge \vec{c_1} + \vec{j} \wedge \vec{c_2} + \vec{k} \wedge \vec{c_3} = 2\vec{a}$.

iii. $[\vec{i}, \vec{c_1}] + [\vec{j}, \vec{c_2}] + [\vec{k}, \vec{c_3}] = [\vec{i}, [\vec{j}, \vec{k}]] + [\vec{j}, [\vec{k}, \vec{i}]] + [\vec{k}, [\vec{i}, \vec{j}]] = 0$ puisque [,] est un crochet de Lie.

iv. Par linéarité $\varphi_C(2\vec{a}) = \varphi_C(\vec{i}\wedge\vec{c_1}) + \varphi_C(\vec{j}\wedge\vec{c_2}) + \varphi_C(\vec{k}\wedge\vec{c_3}) = [\vec{i}, [\vec{j}, \vec{k}]] + [\vec{j}, [\vec{k}, \vec{i}]] + [\vec{k}, [\vec{i}, \vec{j}]] = 0$. On a donc $0 = \varphi_C(\vec{a}) = \varphi_{S_C}(\vec{a}) + \varphi_{A_C}(\vec{a}) = \varphi_{S_C}(\vec{a}) + \vec{a}\wedge\vec{a} = \varphi_{S_C}(\vec{a})$ d'où $\vec{a} \in \mathrm{Ker}(\varphi_{S_C})$.

(c) $[\vec{x}, \vec{y}] = \varphi_C(\vec{x} \wedge \vec{y}) = \varphi_{S_C}(\vec{x} \wedge \vec{y}) + \varphi_{A_C}(\vec{x} \wedge \vec{y}) = \varphi_{S_C}(\vec{x} \wedge \vec{y}) + \vec{a} \wedge (\vec{x} \wedge \vec{y}) = \varphi_{S_C}(\vec{x} \wedge \vec{y}) + (\vec{a}.\vec{y})\vec{x} - (\vec{a}.\vec{x})\vec{y}$.

2. (a) L'application [,] est bilinéaire par linéarité de φ_{S_C} et bilinéarité du produit vectoriel et du produit scalaire. Elle est antisymétrique par antisymétrie du produit vectoriel et un calcul immédiat.

(b) i. Le premier vecteur est à prendre dans le noyau de φ_{S_C}, on peut donc le choisir égal à $\dfrac{1}{\rho}\vec{a}$ qui est bien de norme 1.

ii. $M_b(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$ donc $M_b(\varphi_{S_C}(\vec{u} \wedge \vec{v})) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta(u_3v_1 - u_1v_3) \\ \gamma(u_1v_2 - u_2v_1) \end{pmatrix}$.

$M_b((\vec{a}.\vec{v})\vec{u} - (\vec{a}.\vec{u})\vec{v}) = \rho v_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} - \rho u_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 0 \\ u_2v_1 - u_1v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \end{pmatrix}$

donc $M_b([\vec{u}, \vec{v}]) = M_b(\varphi_{S_C}(\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{a}.\vec{v})\vec{u} - (\vec{a}.\vec{u})\vec{v}) = (u_3v_1 - u_1v_3) \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \rho \end{pmatrix} + (u_1v_2 - u_2v_1) \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \\ \gamma \end{pmatrix}$ qui est bien l'égalité demandée.

iii. En appliquant la formule précédente au couple $(\vec{x}, \vec{d})$ on obtient $[\vec{x}, \vec{d}] = -x_1\rho\vec{d} + x_1\beta\vec{e} = -x_1\vec{e'}$ avec les notations de la question suivante. De même, $[\vec{x}, \vec{e}] = -x_1\gamma\vec{d} - x_1\rho\vec{e} = x_1\vec{d'}$.

iv. On en déduit $[\vec{x}, [\vec{y}, \vec{z}]] = [\vec{x}, (y_3z_1 - y_1z_3)\vec{d} + (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{e}] = -(y_3z_1 - y_1z_3)x_1\vec{e'} + (y_1z_2 - y_2z_1)x_1\vec{d'} = x_1((y_1z_2 - y_2z_1)\vec{d'} + (y_1z_3 - y_3z_1)\vec{e'})$.

v. On a donc par permutation circulaire: $[\vec{x}, [\vec{y}, \vec{z}]] + [\vec{y}, [\vec{z}, \vec{x}]] + [\vec{z}, [\vec{x}, \vec{y}]] = (x_1y_1z_2 - x_1y_2z_1 + y_1z_1x_2 - y_1z_2x_1 + z_1x_1y_2 - z_1x_2y_1)\vec{d'} + (x_1y_1z_3 - x_1y_3z_1 + y_1z_1x_3 - y_1z_3x_1 + z_1x_1y_3 - z_1x_3y_1)\vec{e'} = 0$. Comme [,] est déjà bilinéaire antisymétrique, c'est bien un crochet de Lie.

vi. Choisissons le vecteur $\vec{a} = \vec{i} - \vec{k}$ qui est bien dans le noyau de φ_S. Pour $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ et $\vec{y} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}$ on obtient $\vec{x}\wedge\vec{y} = (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{i} + (x_3y_1 - x_1y_3)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k} = z_1\vec{i} + z_2\vec{j} + z_3\vec{k}$ donc $\varphi_S(\vec{x} \wedge \vec{y}) = z_2\vec{i} + (z_1 + z_3)\vec{j} + z_2\vec{k}$. D'autre part, $(\vec{a}.\vec{y})\vec{x} - (\vec{a}.\vec{x})\vec{y} = (y_1 - y_3)\vec{x} - (x_1 - x_3)\vec{y} = z_2\vec{i} - (z_1 + z_3)\vec{j} + z_2\vec{k}$. On en déduit $[\vec{x}, \vec{y}] = 2(x_3y_1 - x_1y_3)(\vec{i} + \vec{k})$. On a aussi $[\vec{x}, \vec{y}] = 2((\vec{x} \wedge \vec{y}).\vec{j})(\vec{i} + \vec{k}) = 2\det_{b_0}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{j})(\vec{i} + \vec{k})$. Dans cet exemple on a $[\vec{x}, \vec{y}] = 0$ si et seulement si $\det_{b_0}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{j}) = 0$, ce n'est pas équivalent à $(\vec{x}, \vec{y})$ liée.

(c) Si $\vec{a} = 0$, $[\vec{x}, \vec{y}] = \varphi_S(\vec{x} \wedge \vec{y})$ définit bien une application bilinéaire antisymétrique. On en déduit que l'application g définie par $g(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = [\vec{x}, [\vec{y}, \vec{z}]] + [\vec{y}, [\vec{z}, \vec{x}]] + [\vec{z}, [\vec{x}, \vec{y}]]$ est trilinéaire et antisymétrique (si on échange deux des vecteurs, le résultat est multiplié par -1).
Soit $b = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormale directe formée de vecteurs propres de φ_S; par trilinéarité et antisymétrie de g on obtient par le même calcul que celui qui permet d'obtenir l'expression du déterminant d'ordre 3 dans la base b : $g(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \det_b(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})g(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
Or $[\vec{v}, \vec{w}] = \varphi_S(\vec{v} \wedge \vec{w}) = \varphi_S(\vec{u}) = \alpha\vec{u}$ donc $[\vec{u}, [\vec{v}, \vec{w}]] = \varphi_S(\vec{u} \wedge \alpha\vec{u}) = 0$; par permutation circulaire on obtient $g(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ ce qui entraine que l'application g est nulle: [,] est bien un crochet de Lie.