V66G

e3a

CONCOURS ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Premier exercice

Cet exercice a pour but d'étudier les extrémums d'une fonction liée à une matrice symétrique. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique noté $\langle\, ,\, \rangle$, dont la norme associée est notée $\|\ \|$.

1. *Étude d'un exemple.*

(a) Vérifier les inégalités $xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ et $-\frac{1}{2}(x^2+y^2) \leq xy$ pour tous réels x et y et préciser, dans chaque cas, les situations d'égalité.

(b) En déduire que $-\frac{1}{2}$ est un minorant de la fonction

$$r : (x, y, z) \mapsto \frac{xy+z^2}{x^2+y^2+z^2}$$

sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ et montrer que c'est son minimum.

(c) Trouver de même le maximum de r sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

(d) Comparer ce minimum et ce maximum à la plus grande et à la plus petite valeur propre de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. *Étude du cas général.* Soit M une matrice symétrique réelle d'ordre 3 et f l'endomorphisme canoniquement associé à M. On rappelle qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_0 = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ de vecteurs propres pour f, chacun des vecteurs $\vec{u}_k$ étant associé à la valeur propre λ_k. On suppose $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

(a) Soit $\vec{w}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$, que l'on écrit

$$\vec{w} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3$$

dans la base $\mathcal{B}_0$. Vérifier que

$$\frac{\langle f(\vec{w}), \vec{w}\rangle}{\|\vec{w}\|^2} = \lambda_3 + \frac{a_1^2(\lambda_1 - \lambda_3)}{\|\vec{w}\|^2} + \frac{a_2^2(\lambda_2 - \lambda_3)}{\|\vec{w}\|^2}.$$

(b) En déduire que λ_3 est le maximum de la fonction

$$r_f : \vec{w} \mapsto \frac{\langle f(\vec{w}), \vec{w}\rangle}{\|\vec{w}\|^2}$$

sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

(c) Déterminer de même le minimum de r_f sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$.

(d) Vérifier que l'on retrouve ainsi les résultats de la question **1**.

3. *Une application.* On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

et l'on note f son endomorphisme canoniquement associé.

(a) Déterminer les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de f.

(b) En déduire le maximum et le minimum de la fonction r_f sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ et préciser les vecteurs en lesquels ils sont atteints.

(c) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ par

$$g(x,y,z) = \frac{-x+y+2z}{x^2+y^2+z^2}$$

et P la partie de $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ constituée des triplets (x,y,z) tels que $x+y+2z = 1$. Soit $(x,y,z) \in P$ et $\vec{w} = (x,y,z)$. Vérifier que $g(x,y,z) = r_f(\vec{w})$.

(d) En déduire que g possède un minimum et un maximum sur P, que l'on calculera et préciser les points en lesquels ils sont atteints.

Deuxième exercice

On note $A = [0,1] \times [0,+\infty[$. Cet exercice a pour objet l'étude de l'existence et de l'unicité, sous certaines conditions, de solutions à l'équation des ondes

$$\forall (x,t) \in A, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t) = 0\,. \tag{1}$$

Toutes les fonctions intervenant dans cet exercice sont à valeurs réelles.

1. Soit $F : (x,t) \mapsto F(x,t)$ une fonction définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et vérifiant (1). On considère alors la fonction E_F définie sur $[0,+\infty[$ par:

$$E_F(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\left(\frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right)^2\right] dx.$$

(a) Montrer que E_F est de classe C^1 sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $[0,+\infty[$. *On précisera avec soin le théorème utilisé.* La fonction E_F est-elle de classe C^1 sur $[0,+\infty[$?

(b) Montrer que

$$\forall t \geq 0,\ E'_F(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(1,t)\frac{\partial F}{\partial t}(1,t) - \frac{\partial F}{\partial x}(0,t)\frac{\partial F}{\partial t}(0,t).$$

2. On se donne deux fonctions g et h définies et continues sur $[0,1]$ ainsi que deux fonctions α et β définies et continues sur $[0,+\infty[$. On cherche à résoudre le problème suivant, d'inconnue f, fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, vérifiant le système (S):

$$(S)\quad \begin{cases} \forall (x,t) \in A,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = 0 & (2) \\[2ex] \forall x \in [0,1],\ f(x,0) = g(x),\quad \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0) = h(x) & (3) \\[2ex] \forall t \geq 0,\ f(0,t) = \alpha(t),\quad f(1,t) = \beta(t). & (4) \end{cases}$$

Les fonctions g et h sont appelées *données initiales* et les fonctions α et β *valeurs aux bords*.

(a) On suppose que f_1 et f_2 sont deux solutions de (S) et l'on pose $F = f_1 - f_2$. Vérifier que F satisfait (1).

(b) Montrer que $E'_F(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$.

(c) Montrer que $E_F(0) = 0$ et en déduire que (S) possède *au plus* une solution.

3. Le but de cette question est de construire quelques solutions de (S). On considère à cet effet une suite *bornée* $(a_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels. On définit les fonctions h et f par

$$\begin{aligned} h(x) &= \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^3} \sin(n\pi x), \\ f(x,t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^4} \sin(n\pi x)\sin(n\pi t). \end{aligned}$$

(a) Montrer que h est définie et continue sur $[0,1]$.

(b) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^2$ et possède des dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ sur $\mathbb{R}^2$. *On admettra que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.*

(c) Montrer que la fonction f satisfait

$$\begin{cases} \forall (x,t) \in A,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = 0 & (5) \\[2ex] \forall x \in [0,1],\ f(x,0) = 0,\quad \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0) = h(x) & (6) \\[2ex] \forall t \geq 0,\ f(0,t) = 0,\quad f(1,t) = 0. & (7) \end{cases}$$

Troisième exercice

Ce problème a pour objet l'étude des solutions *maximales* d'un système différentiel non linéaire.

1. *Question préliminaire*. Soit a et b deux réels avec $a < b$, $I = [a, b[$ et f une fonction définie et de classe C^1 sur I, à valeurs réelles. On suppose que f et f' sont bornées sur $[a, b[$.

   (a) Montrer qu'il existe une constante M telle que la fonction
   $$g : t \mapsto f(t) + Mt$$
   soit croissante sur I

   (b) En déduire que f possède une limite finie en b.

On donne un réel t_0 et (x_0, y_0) un point de $\mathbb{R}^2$. On rappelle qu'une solution du *problème de Cauchy*

$$(S) : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + xy \\ \frac{dy}{dt} = -2y - x^2 \\ (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

est un triplet (I, X, Y) où $I =]\alpha, \beta[$ est un intervalle ouvert contenant t_0, X et Y deux fonctions définies et de classe C^1 sur I vérifiant, pour tout $t \in I$:

$$\begin{cases} X'(t) = -X(t) + X(t)Y(t) \\ Y'(t) = -2Y(t) - X^2(t) \\ (X(t_0), Y(t_0)) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

et que ce problème possède une unique solution *maximale* (I, X, Y) c'est à dire que pour toute autre solution (J, X_1, Y_1) de (S), on a $J \subset I$, $X_1(t) = X(t)$ et $Y_1(t) = Y(t)$ pour tout $t \in J$.

Par la suite, le point (x_0, y_0) est donné, on prend $t_0 = 0$ et (I, X, Y) est la solution *maximale* du problème de Cauchy (S) correspondant. Que ses extrémités soient finies ou infinies, on notera $I =]\alpha, \beta[$. Les questions suivantes ont pour but de déterminer l'intervalle I. Soit u la fonction définie sur I par $u(t) = X^2(t) + Y^2(t)$.

2. On suppose dans cette question que β est un nombre réel.

   (a) Vérifier que la fonction u est décroissante sur I.

   (b) En déduire que les fonctions X, Y puis X' et Y' sont bornées sur $[0, \beta[$.

   (c) En déduire que X et Y possèdent des limites finies en β, que l'on notera respectivement x_1 et y_1.

   (d) On considère la solution maximale (I_1, X_1, Y_1) du problème de Cauchy
   $$(S_1) : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + xy \\ \frac{dy}{dt} = -2y - x^2 \\ (x(\beta), y(\beta)) = (x_1, y_1). \end{cases}$$
   On note $I_1 =]\alpha_1, \beta_1[$ et l'on définit les fonctions X_2 et Y_2 sur $]\alpha, \beta_1[$ par
   $$X_2(t) = \begin{cases} X(t) & \text{si } t \in]\alpha, \beta[\\ X_1(t) & \text{si } t \in [\beta, \beta_1[\end{cases} \quad Y_2(t) = \begin{cases} Y(t) & \text{si } t \in]\alpha, \beta[\\ Y_1(t) & \text{si } t \in [\beta, \beta_1[. \end{cases}$$
   Montrer que $(]\alpha, \beta_1[, X_2, Y_2)$ est une solution de (S). En déduire une contradiction. Que peut-on en conclure?

3. On considère la fonction v définie sur I par $v(t) = e^{2t}u(t)$.

   (a) Vérifier que v est décroissante sur I.

   (b) En déduire que $u(t) \leq (x_0^2 + y_0^2)e^{-2t}$ pour tout $t \geq 0$ puis que $(X(t), Y(t)) \to (0, 0)$ lorsque $t \to +\infty$.

4. Montrer que $\alpha = -\infty$ (dans le cas contraire, on pourra utiliser la fonction $w : t \mapsto e^{4t}u(t)$ et en déduire que les fonctions X, Y puis X' et Y' sont bornées sur $]\alpha, 0]$).