# 1 Première partie : étude de l'application $\mathcal{A}_a$

## 1.1 Propriétés élémentaires de $\mathcal{A}_a$

1.1.1. La linéarité de $\mathcal{A}_a$ résulte directement de celle de la dérivation.
On vérifie également que si $\deg(P) \leqslant 3$, $\deg(\mathcal{A}_a(P)) \leqslant 3$, ce qui justifie que l'on a bien $\mathcal{A}_a(\mathbb{R}_3[X]) \subset \mathbb{R}_3[X]$.

1.1.2. Calculons : $\mathcal{A}_a(1) = 0$, $\mathcal{A}_a(X) = aX - 1$ , $\mathcal{A}_a(X^2) = 2(a^2+1)X^2$, $\mathcal{A}_a(X^3) = (6+3a)X^3 + 3X^2$. Par suite :

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(a+1) & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6+3a \end{pmatrix}.$$

1.1.3. (a) $M_4$ est triangulaire supérieure, donc son polynôme caractéristique est $X(X+4)(X+6)^2$.
Par conséquent, $M_{-4}$ est diagonalisable si et seulement si l'espace propre $E_{-6}$ associé à la valeur propre $-6$ est de dimension 2 (soit sa multiplicité comme racine du polynôme caractéristique).
En résolvant l'équation $M_{-4}X = -6X$, on obtient que $E_{-6} = \text{Vect}((0,0,1,0))$.
Donc $\dim_{\mathbb{R}}(E_{-6}) = 1 < 2$ : $M_{-4}$ n'est pas diagonalisable.

(b) Les valeurs propres de $M_{-4}$ sont 0, $-4$, $-6$, d'espaces propres respectifs
$E_0 = \text{Vect}((1,0,0,0))$, $E_{-4} = \text{Vect}((1,4,0,0))$ et $E_{-6} = \text{Vect}((0,0,1,0))$.

1.1.4. (a) $M_a$ est triangulaire supérieure : son polynôme caractéristique est $X(X-a)(X-2(a+1))(X-(3a+6))$.
Les valeurs propres de $\mathcal{A}_a$ sont donc 0, $a$, $2(a+1)$ et $3a+6$.

(b) Les possibilités pour avoir une valeur propre double sont

- **a=0** : alors les valeurs propres sont 0 (double), 2 et 6 ;
- **2(a+1)=0** : alors $a = -1$ et les valeurs propres sont 0 (double), $-1$ et 3 ;
- **3a+6=0** : alors $a = -2$ et les valeurs propres sont 0 (double) et $-2$ (double) ;
- **a=2(a+1)** : alors $a = -2$ et les valeurs propres sont 0 (double)et $-2$ (double) ;
- **a=3a+6** : alors $a = -3$ et les valeurs propres sont 0, $-3$ (double) et $-4$ ;
- **2(a+1)=3a+6** : alors $a = -4$ et les valeurs propres sont 0, $-4$ et $-6$ (double).

(c) L'étude des valeurs propres doubles montre qu'il n'existe pas de valeur de $a$ pour laquelle $\mathcal{A}_a$ admet une valeur propre triple (pour avoir une valeur propre triple, il faut évidemment avoir déjà une double...).

1.1.5. Si $a \notin \{0,-1,-2,-3,-4\}$, alors le polynôme caractéristique de $\mathcal{A}_a$ est scindé simple, donc $\mathcal{A}_a$ est diagonalisable.
Il nous faut ensuite étudier en détail les valeurs de $a$ restantes. Et plus particulièrement la dimension de l'espace propre correspondant à la valeur propre double (comme nous l'avons fait en 1.1.3a) :

- $\mathbf{a = 0}$ : $E_0 = \text{Vect}((1,0,0,0))$ donc $\dim_{\mathbb{R}}(E_0) = 1 < 2$ ; $\mathcal{A}_0$ n'est pas diagonalisable ;
- **a = -1** : $E_0 = \text{Vect}((1,0,0,0),(0,0,1,0))$ donc $\dim_{\mathbb{R}}(E_0) = 2$ ; $\mathcal{A}_{-1}$ est diagonalisable ;
- **a = -2** : $E_0 = \text{Vect}((1,0,0,0),(0,0,3,2))$ et $E_{-2} = \text{Vect}((1,2,0,0),(0,0,1,0))$ donc $\dim_{\mathbb{R}}(E_0) = \dim_{\mathbb{R}}(E_{-2}) = 2$ ; $\mathcal{A}_{-2}$ est diagonalisable ;
- **a = -3** : $E_{-3} = \text{Vect}((1,3,0,0),(0,0,3,1))$ donc $\dim_{\mathbb{R}}(E_{-3}) = 2$ ; $\mathcal{A}_{-3}$ est diagonalisable ;
- **a=-4** : déjà traité ; $\mathcal{A}_{-4}$ n'est pas diagonalisable.

Finalement, $\mathcal{A}_a$ est diagonalisable pour tout $a \in \mathbb{R}$, sauf $a = 0$ et $a = -4$.

1.1.6. Si $P$ est un polynôme de degré $p$, de coefficient dominant $\alpha$, alors $\mathcal{A}_a(P)$ est de degré $\leqslant p$, le coefficient de degré $p$ de $\mathcal{A}_a(P)$ étant $\alpha\,(p(p-1)) + ap)$. Et ce coefficient est non nul pour tout polynôme $P$ de degré $p$ si et seulement si $a \neq -(p-1)$. Ceci doit être vérifié pour $p = 1$, $p = 2$ et $p = 3$.
Donc $\mathcal{A}_a(P)$ est de même degré que $P$ pour tout polynôme non constant de $\mathbb{R}_3[X]$ si et seulement si $a \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2\}$.
Remarque : on pouvait également remarquer que ceci n'est vérifié que si 0 n'apparaît pas deux fois sur la diagonale de $M_a$, donc n'est pas une valeur propre double de $\mathcal{A}_a$.

### 1.2 Étude de cas particuliers

On suppose que $a \notin \{0, -1, -2\}$.

1.2.1. $\ker(\mathcal{A}_a) = \operatorname{Vect}(1)$.

1.2.2. D'après le théorème du rang et 1.2.1, $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im}(\mathcal{A}_a)) = 4 - 1 = 3$. De plus, $\mathcal{A}_a(X) = -1 + aX \in \operatorname{Im}(\mathcal{A}_a)$, $\mathcal{A}_a\left(\frac{1}{2(a+1)}X^2\right) = X^2 \in \operatorname{Im}(\mathcal{A}_a)$ et $\mathcal{A}_a\left(\frac{1}{(6+3a)}X^3 - \frac{3}{2(6+3a)(a+1)}X^2\right) = X^3 \in \operatorname{Im}(\mathcal{A}_a)$.
Enfin, $(-1+aX, X^2, X^3)$ est libre (famille de polynômes de degrés 2 à 2 distincts). Ceci montre que $(-1+aX, X^2, X^3)$ est une base de $\operatorname{Im}(\mathcal{A}_a)$.

1.2.3. Rappelons que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation linéaire $\mathcal{A}_a(P) = Q$ est

- $\mathcal{S} = R + \ker(\mathcal{A}_a)$ si $R$ (souvent appelé «solution particulière») vérifie $\mathcal{A}_a(R) = Q$, i.e. si $Q \in \operatorname{Im}(\mathcal{A}_a)$ ;
- $\mathcal{S} = \emptyset$ si $Q \notin \operatorname{Im}(\mathcal{A}_a)$.

Et cela s'applique directement ici :

- si $p = 0$ ou $p = 1$, $\mathcal{S} = \emptyset$ ;
- si $p = 2$, $\mathcal{S} = \frac{1}{2(a+1)}X^2 + \operatorname{Vect}(1) = \left\{\frac{1}{2(a+1)}X^2 + \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$ ;
- si $p = 3$, $\mathcal{S} = \frac{1}{(6+3a)}X^3 - \frac{3}{2(6+3a)(a+1)}X^2 + \operatorname{Vect}(1) = \left\{\frac{1}{(6+3a)}X^3 - \frac{3}{2(6+3a)(a+1)}X^2 + \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

## 2 Deuxième partie : quelques propriétés de l'application $\mathcal{A}_{(a,n)}$

2.1. Comme en 1.1.1, cela découle directement de la linéarité de la dérivation, en prenant soin de vérifier que si $\deg(P) \leqslant n$, $\deg\left(\mathcal{A}_{(a,n)}(P)\right) \leqslant n$.

2.2. Calculons : $\mathcal{A}_{(a,n)}(1) = 0$, $\mathcal{A}_{(a,n)}(X) = aX - 1$ et $\forall k \geqslant 2$, $\mathcal{A}_{(a,n)}(X^k) = k(k+a-1)X^k + k(k-2)X^{k-1}$, d'où

$$M_a = \begin{pmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots\cdots & 0 \\
0 & a & 0 & 0 & & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & 0 & 2(a+1) & 3 & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\
\vdots & & 0 & 3(2+a) & \ddots & 0 & & & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & j(j-2) & & & \vdots \\
\vdots & & & & & j(j-1+a) & & & \vdots \\
\vdots & & & & & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\
\vdots & & & & & & \ddots & (n-1)(n-3) & \vdots \\
\vdots & & & & & & & (n-1)(n-2+a) & n(n-2) \\
0 & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & 0 & n(n-1+a)
\end{pmatrix}.$$

2.3. La matrice $M_a$ étant triangulaire supérieure, il vient immédiatement que les valeurs propres de $\mathcal{A}_a n$ sont les

$$\lambda = k(k-1+a), \qquad \text{pour } k \in [\![0, n]\!].$$

(Remarquer que $0(0-1+a) = 0$ et $1(1-1+a) = a$.)

2.4. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Il y a équivalence entre les énoncés, $\forall k, \ell \in [\![0, n]\!]$ :

(i) $k(k-1+a) = \ell(\ell-1+a)$ ;
(ii) $(k-\ell)(k+\ell-1+a) = 0$ ;
(iii) $k = \ell$ (en effet, $k+\ell-1 \geqslant 0$ et $a > 0$) .

Par suite, $\mathcal{A}_{(a,n)}$ possède $n+1$ valeurs propres distinctes et donc est diagonalisable.

Dans le cas particulier $a = 0$, 0 est racine d'ordre 2 du polynôme caractéristique
et $E_0 = \ker\left(\mathcal{A}_{(0,n)}\right) = \operatorname{Vect}(1)$ est de dimension 1 : $\mathcal{A}_{(0,n)}$ n'est pas diagonalisable.

# 3 Troisième partie : recherche de solutions développables en série entière d'une équation différentielle

3.1. Soit $f \in \mathcal{E}$.
Alors $\forall x \in ]-1;1[$, $\sum a_n x^n$ converge. Donc le rayon de convergence $R$ de cette série entière vérifie $R \geqslant 1$.
Une série entière étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, il en résulte que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

3.2. Soit $f \in \mathcal{E}$ telle que $\mathcal{D}_a(f) = af$.

(a) Pour tout $x \in ]-1,1[$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$\text{et } f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n.$$

Et donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_a(f)(x) - af(x) &= x(x+1)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (ax-1)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - a\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a a_n x^n \\
&= (-a_1 - a a_0) + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)[(n+1)a_{n+1} + (n+a)a_n]x^n.
\end{aligned}$$

D'où, par unicité de développement en série entière, comme $\mathcal{D}_a(f)(x) - af(x) = 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 0\, x^n$, nous obtenons

$$\forall n \geqslant 2,\ (n-1)[(n+1)a_{n+1} + (n+a)a_n] = 0.$$

Et aussi $0 = (-a_1 - a a_0) = (0-1)[(0+1)a_{0+1} + (0+a)a_0]$ (égalité pour $n=0$) et $0 = (1-1)[(1+1)a_{1+1} + (1+a)a_1]$ (égalité pour $n=1$).

(b) La question précédente montre que $a_{n+1} = -\dfrac{n+a}{n+1} a_n$. Une récurrence immédiate permet de démontrer que pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$a_n = \frac{2(-1)^n \prod_{k=2}^{n-1}(k+a)}{n!} a_2.$$

Supposons maintenant $a_0 = a_1 = 0$ et $a_2 = 1$.
$f(x) = \sum a_n x^n$ est un polynôme si et seulement si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow a_n = 0$.
D'après la relation de récurrence $a_{n+1} = -\frac{n+a}{n+1} a_n$, si $a_{n_0} = 0$, alors $\forall n \geqslant n_0$, $a_n = 0$. Donc $f$ est un polynôme si, et seulement si, l'un de $a_n$ s'annule, et donc si, et seulement, si $\exists k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$ tel que $k + a = 0$. On en déduit que

$$f \text{ est un polynôme si, et seulement si, } a \in \mathbb{Z}, a \leqslant -2.$$

Si $a = -n \leqslant -2 \in \mathbb{Z}$, alors
– le degré de $f$ est $n$ ;
– son coefficient dominant est $a_n = \dfrac{2(-1)^n \prod_{k=2}^{n-1}(k-n)}{n!} \times 1 = \dfrac{2\prod_{k=2}^{n-1}(n-k)}{n!} = \dfrac{2(n-2)!}{n!} = \dfrac{2}{n(n-1)} = \dfrac{1}{\binom{n}{2}}$.

(c) Soit $a \in \mathbb{R}$. On a

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \left|-\frac{n+a}{n+1}\right| |x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|$$

donc d'après la règle de d'Alembert, la série numérique $\sum a_n x^n$ converge pour $|x| < 1$ et diverge pour $|x| > 1$, ce qui montre le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut 1.

3.3. Ceci montre que l'ensemble des solutions dans $\mathcal{E}$ de $\mathcal{D}_a(f) = af$ est

$$\left\{ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \;\middle|\; a1 = -aa_0 \text{ et } \forall n \geqslant 3,\ a_n = \frac{2(-1)^n \prod_{k=2}^{n-1}(k+a)}{n!} a_2 \right\}$$

$$= \left\{ x \mapsto \alpha - a\alpha x + \beta x^2 + \beta \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2(-1)^n \prod_{k=2}^{n-1}(k+a)}{n!} x^n \;\; |\alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{ Vect}\left( x \mapsto 1 - ax, x \mapsto x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2(-1)^n \prod_{k=2}^{n-1}(k+a)}{n!} x^n \right).$$

3.4. Par suite, pour tout réel $a$, $\dim_{\mathbb{R}} \left(\ker\left(\mathcal{D}_a - a.\ \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}\right)\right) = 2$.

Et $P \in \ker\left(\mathcal{A}_{(a,n)} - a.\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}\right)$ si, et seulement si, $P \in \ker\left(\mathcal{D}_a - a.\ \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}\right)$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
On a donc :

$$\text{si } a \notin [\![-n, -1]\!], \qquad \ker\left(\mathcal{A}_{(a,n)} - a.\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}\right) = \text{ Vect}\left(x \mapsto 1 - ax\right)$$

et

$$\text{si } a \in [\![-n, -1]\!], \qquad \ker\left(\mathcal{A}_{(a,n)} - a.\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}\right) = \text{ Vect}\left( x \mapsto 1 - ax, x \mapsto x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2(-1)^n \prod_{k=2}^{n-1}(k+a)}{n!} x^n \right)$$

(dans ce cas, le deuxième vecteur est un polynôme).
Donc

- **si** $a \notin [\![-n, -1]\!]$**,** $\dim_{\mathbb{R}}\left(\ker\left(\mathcal{A}_{(a,n)} - a.\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}\right)\right) = 1 \neq \dim_{\mathbb{R}}\left(\ker\left(\mathcal{D}_a - a.\ \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}\right)\right);$
- **si** $a \in [\![-n, -1]\!]$**,** $\dim_{\mathbb{R}}\left(\ker\left(\mathcal{A}_{(a,n)} - a.\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}\right)\right) = 2 = \dim_{\mathbb{R}}\left(\ker\left(\mathcal{D}_a - a.\ \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}\right)\right).$

# 4 Quatrième partie : résolution d'une équation différentielle

4.1. Soit $f$ une solution de $(E)$ sur $]0, +\infty[$. Alors $f$ est deux fois dérivable et pour tout $x > 0$,

$$f''(x) = \frac{1 - ax}{x(x+1)} f'(x) + 2\frac{a+1}{x(x+1)} f(x).$$

Par suite, comme $x \mapsto x(x+1)$ ne s'annule pas, $f''$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et donc $f$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0, +\infty[$ et $f'$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.
Il en résulte que $f''$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ donc que $f$ est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $]0, +\infty[$ et $f'$ de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0, +\infty[$.
De proche en proche, on établit ainsi que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

4.2. Soit $\varphi$ une solution de $(E)$ sur $]0, +\infty[$. $\varphi$ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, d'où, comme $x \mapsto 1/x^2$ est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, on en déduit que

$$\psi : x \mapsto \frac{\varphi(x)}{x^2} \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } ]0, +\infty[.$$

Calculons, pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) = 2x\psi(x) + x^2\psi'(x) \qquad \text{et} \qquad \varphi''(x) = 2\psi(x) + 4x\psi'(x) + x^2\psi''(x)$$

et donc

$$\begin{aligned}
0 &= x(x+1)\varphi''(x) + (ax-1)\varphi'(x) - 2(a+1)\varphi(x) \\
&= x^2\left[x(x+1)\psi''(x) + ((4+a)x+3))\,\psi'(x)\right] + \left(2x^2 + 2ax^2 - 2ax^2 - 2x^2 + 2x - 2x\right)\psi(x) \\
&= x^2\left[x(x+1)\psi''(x) + ((4+a)x+3))\,\psi'(x)\right]
\end{aligned}$$

donc $\psi'$ est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$(E_1) \qquad x(x+1)u' + ((4+a)x+3)\,u = 0.$$

Ceci était prévisible puisque $X^2$ est un vecteur propre de $\mathcal{A}_{(a,n)}$ associé à la valeur propre $2(a+1)$ et donc $x \mapsto x^2$ est solution de $(E)$, donc avec le changement de fonction, les termes en $\psi(x)$ se simplifient.

4.3. On sit que l'ensemble des solutions d'une telle équation est

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ x \mapsto \alpha e^{-\displaystyle\int_1^x \frac{(4+a)t+3}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cherchons à écrire $\dfrac{(4+a)t+3}{t(t+1)}$ sous la forme $\dfrac{\alpha}{t} + \dfrac{\beta}{t+1}$. En réduisant au même dénominateur, on obtient : $\dfrac{(4+a)t+3}{t(t+1)} = \dfrac{3}{t} + \dfrac{1+a}{t+1}$ donc $\displaystyle\int_1^x \frac{(4+a)t+3}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t = 3\ln(t) + (1+a)\ln(1+t) - (1+a)\ln(2)$ d'où

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ x \mapsto \frac{\alpha}{t^3(t+1)^{1+a}} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

4.4. On suppose $a = -4$.

(a) On a l'équivalence entre les énoncés :

(i) $\varphi$ solution de $(E)$ sur $]0,+\infty[$ ;

(ii) $\psi'$ solution de $(E_1)$ sur $]0,+\infty[$, où $\psi : x \mapsto \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$ ;

(iii) $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0$, $\psi'(x) = \alpha\dfrac{(x+1)^3}{x^3} = \alpha\left(1 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right)$ ;

(iv) $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x > 0$, $\psi(x) = \alpha\left(x + 3\ln(x) - \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{2x^2}\right) + \beta$ ;

(v) $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x > 0$, $\varphi(x) = \alpha\left(x^3 + 3x^2\ln(x) - 3x - \dfrac{1}{2}\right) + \beta x^2$ .

D'où les solutions de $(E)$ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \ker\left(\Delta_{-4} + 6\ \mathrm{Id}_{\mathcal{C}^\infty}\right) \\
&= \left\{x \mapsto \alpha\left(x^3 + 3x^2\ln(x) - 3x - \tfrac{1}{2}\right) + \beta x^2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(x \mapsto \left(x^3 + 3x^2\ln(x) - 3x - \tfrac{1}{2}\right), x \mapsto x^2\right).
\end{aligned}$$

(b) On obtient que $\dim_{\mathbb{R}}\left(\ker\left(\Delta_{-4} + 6\ \mathrm{Id}_{\mathcal{C}^\infty}\right)\right) = 2$, alors que $\dim_{\mathbb{R}}\left(\ker\left(\mathcal{A}_{-4} + 6\ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}\right)\right) = 1$.
(Cela provient du fait que $x \mapsto \left(x^3 + 3x^2\ln(x) - 3x - \frac{1}{2}\right)$ n'est pas un polynôme.)