Corrigé de E3A 2006 PC Epreuve A

partie I.

1) (a) L'application T_n est clairement une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même qui vérifie $T_n \circ T_n = T_n$, c'est donc bien un projecteur.

(b) L'image de T_n est $\mathbb{R}_n[X]$ car chaque polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ est égal à son image par T_n.

(c) $P \in \operatorname{Ker}(T_n) \Leftrightarrow P = \displaystyle\sum_{k>n} p_k X^k \Leftrightarrow P(x) = x^{n+1}Q(x)$ avec Q polynôme. On en déduit que $P(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$. Réciproquement, si $P(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$ on ne peut pas avoir $p_k \neq 0$ avec $k \leqslant n$ donc $T_n(P) = 0$.

2) (a) Le degré de $(X+X^2)^k$ est égal à $2k$; par suite, si le degré de P est égal à n , celui de $\varphi(P)$ est égal à $2n$.

(b) Si P n'est pas nul, il a un degré $n \geqslant 0$ d'où $\varphi(P)$ a pour degré $2n$ et donc n'est pas nul : φ est injectif. φ n'est pas surjectif car les polynômes de degré impair n'ont pas d'antécédent par φ.

3) (a) $\varphi_4(X^j) = T_4((X+X^2)^j)$. En tronquant au degré 4 on obtient :

$$\begin{cases} \varphi_4(1) &= 1 \\ \varphi_4(X) &= X + X^2 \\ \varphi_4(X^2) &= X^2 + 2X^3 + X^4 \\ \varphi_4(X^3) &= X^3 + 3X^4 \\ \varphi_4(X^4) &= X^4 \end{cases}. \text{ On a donc : } M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) $\varphi_n(X^j) = T_n((X+X^2)^j) = T_n(X^j(1+X)^j) = T_n\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} X^{j+k}\right)$. En posant $i = j+k$ on obtient $\varphi_n(X^j) = T_n\left(\displaystyle\sum_{i=j}^{2j} \binom{j}{i-j} X^i\right) = \displaystyle\sum_{i=j}^{\min(2j,n)} \binom{j}{i-j} X^i$. La matrice M_n est bien triangulaire inférieure avec $m_{i,j} = \dbinom{j}{i-j}$ pour $0 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$ (le coefficient binomial est nul pour $i - j > j$).

4) (a) $$M_4 \times \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = y_0 \\ x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 - y_1 \\ x_3 = y_3 - 2y_2 + 2y_1 \\ x_4 = y_4 - 3y_3 + 5y_2 - 5y_1 \end{cases} \text{ d'où : } M_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) M_n est inversible car elle est triangulaire avec des 1 sur la diagonale. L'endomorphisme φ_n est donc bijectif.

(c) La résolution du système $M_n \times X_n = Y_n$ comme au I.4.a montre que chaque x_i s'exprime en fonction des y_j avec $j \leqslant i$. La matrice M_n^{-1} est donc triangulaire inférieure.

5) (a) Pour $0 \leqslant i \leqslant n$ on a $T_n((X+X^2)^i) = T_n(\varphi(X^i)) = \varphi_n(X^i)$. $\mathcal{B}'$ est donc la base image de la base canonique $\mathcal{B}$ par l'automorphisme φ_n . Par suite, Q_n est la matrice de $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

(b) Pour $0 \leqslant j \leqslant n$ on a donc $X^j = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} q_{i,j} T_n((X+X^2)^i)$ qui donne bien $x^j = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} q_{i,j}(x+x^2)^i + o(x^n)$

quand x tend vers 0 puisque T_n tronque au degré n.

(c) On reporte I.5.b dans $X^j = (X+X^2)X^{j-1} - X^{j+1}$:

$$\sum_{i=0}^{n} q_{i,j}(x+x^2)^i + o(x^n) = \sum_{i=0}^{n} q_{i,j-1}(x+x^2)^{i+1} + o(x^n) - \sum_{i=0}^{n} q_{i,j+1}(x+x^2)^i + o(x^n)$$

d'où en changeant i en $i-1$ dans le second $\sum$ et en utilisant $q_{0,j} = 0$ pour $j \geqslant 1$:

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(q_{i,j} - q_{i-1,j-1} + q_{i,j+1})(x+x^2)^i \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$. On en déduit pour tout i que $r_i = q_{i,j} - q_{i-1,j-1} + q_{i,j+1}$ est nul (sinon le premier membre serait équivalent à $r_m x^m$ pour un $m \leqslant n$ et ne serait pas égal à $o(x^n)$).

(d) La diagonale de Q_5 est constituée de 1, sa première colonne de 0 excepté le premier coefficient. On calcule successivement à l'aide de l'égalité donnant $q_{i,j}$: $q_{2,1} = -1$, $q_{3,2} = -2$,... jusqu'à $q_{5,4} = -4$, puis $q_{3,1} = 2$, $q_{4,2} = 5$ et $q_{5,3} = 9$, puis $q_{4,1} = -5$, $q_{5,2} = -14$, et enfin $q_{5,1} = 14$.

(e) La formule proposée donne $q_{i,i} = 1$, $q_{i,i-1} = -(i-1)$, $q_{i,i-2} = (i-2)(i+1)/2$, $q_{i,i-3} = (i-3)(i+2)(i+1)/6$ et $q_{5,1} = \binom{8}{4}/5 = 14$. On retrouve bien les coefficients calculés au I.5.d.

partie II.

1) (a) Puisque $x+x^2$ tend vers 0 quand x tend vers 0 on peut écrire $f(x+x^2) \underset{x\to 0}{=} P(x+x^2)+o((x+x^2)^n) = P(x+x^2)+o(x^n)$ car $x+x^2 \underset{x\to 0}{\sim} x$. D'où en tronquant au degré n : $f(x+x^2) \underset{x\to 0}{=} T_n(P(x+x^2))+o(x^n)$.

(b) Pour $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k x^k$, les coordonnées de $T_n(P(X+X^2)) = \varphi_n(P)$ s'obtiennent par le produit matriciel $M_n \times \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix}$. Donc : $f(x+x^2) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} m_{i,j}p_j x^i + o(x^n) = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i}\binom{j}{i-j}p_j\right)x^i + o(x^n)$.

2) (a) $g(x) = f(x+x^2)$ avec $f(x) = \dfrac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+x^4+o(x^4)$. Le produit $M_4 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donne $g(x) = 1 - x + x^3 - x^4 + o(x^4)$.

(b) Un calcul direct donne : $g(x) = 1-(x+x^2)+(x+x^2)^2-(x+x^2)^3+(x+x^2)^4+o((x+x^2)^4) = 1-x-x^2+x^2+2x^3+x^4-x^3-3x^4+x^4+o(x^4) = 1-x+x^3-x^4+o(x^4)$.

3) (a) La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_n(x+x^2)^n$ converge si $|x+x^2| < R$ et diverge si $|x+x^2| > R$. L'étude de la fonction $x \mapsto x+x^2$ qui a un minimum égal à $-1/4$ montre qu'il faut distinguer 2 cas :

• Si $R > 1/4$, l'équation $|x+x^2| = R$ a deux solutions : $a = \dfrac{-1-\sqrt{1+4R}}{2}$ et $b = \dfrac{-1+\sqrt{1+4R}}{2}$. La série $(\sum \lambda_n(x+x^2)^n)$ converge alors pour $x \in]a,b[$ et diverge pour $x < a$ ou pour $x > b$; le plus grand ensemble ouvert Ω est donc $]a,b[$.

• Si $R < 1/4$, l'équation $|x+x^2| = R$ a quatre solutions : $a, b, c = \dfrac{-1-\sqrt{1-4R}}{2}$ et $d = \dfrac{-1+\sqrt{1-4R}}{2}$

vérifiant $a < c < d < 0 < b$. La série $(\sum \lambda_n (x+x^2)^n)$ converge pour $x \in]a, c[\cup]d, b[$ et diverge pour $x < a$ ou $x > b$ ou $x \in]c, d[$; le plus grand ensemble ouvert Ω est donc $]a, c[\cup]d, b[$.

(b) $g_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n x^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j$ d'où en posant $k = n + j$: $g_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n \sum_{k=n}^{2n} \binom{n}{k-n} x^k$. On permute ensuite les deux $\sum$ en tenant compte des conditions sur n et k : $0 \leqslant n \leqslant N$ et $n \leqslant k \leqslant 2n$ qui donnent $0 \leqslant k \leqslant 2N$ et $k/2 \leqslant n \leqslant \min(N, k)$. On obtient : $g_N(x) = \sum_{k=0}^{2N} x^k \sum_{n=k/2}^{\min(k,N)} \lambda_n \binom{n}{k-n}$.

(c) $g_N(x) = \sum_{k=0}^{N} x^k \sum_{n=k/2}^{k} \lambda_n \binom{n}{k-n} + \sum_{k=N+1}^{2N} x^k \sum_{n=k/2}^{N} \lambda_n \binom{n}{k-n}$ d'où

$$|g_N(x) - h_N(x)| = \left| \sum_{k=N+1}^{2N} x^k \sum_{n=k/2}^{N} \lambda_n \binom{n}{k-n} \right| \leqslant \sum_{k=N+1}^{2N} |x|^k \sum_{n=k/2}^{N} |\lambda_n| \binom{n}{k-n} \leqslant \sum_{n=N/2}^{N} |\lambda_n| \sum_{k=n}^{2n} |x^k| \binom{n}{k-n}$$

en permutant les $\sum$ car les conditions $N < k \leqslant 2N$ et $k/2 \leqslant n \leqslant N$ entrainent $N/2 < n \leqslant N$ et $N < k \leqslant 2n$ que l'on peut majorer par $N/2 \leqslant n \leqslant N$ et $n \leqslant k \leqslant 2n$ puisque cela revient à ajouter des termes positifs dans le second membre. On obtient alors en posant $k = n + j$: $|h_N(x) - g_N(x)| \leqslant \sum_{n=N/2}^{N} |\lambda_n| |x|^n \sum_{j=0}^{n} |x|^j \binom{n}{j}$ soit $|h_N(x) - g_N(x)| \leqslant \sum_{n=N/2}^{N} |\lambda_n| |x|^n (1 + |x|)^n = \sum_{n=N/2}^{N} |\lambda_n| (x^2 + |x|)^n$.

(d) $f(x + x^2) = \lim_{N \mapsto +\infty} g_N(x)$. Si $x^2 + |x| < R$ c'est à dire pour $|x| < b = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4R}}{2}$ la série $\sum(|\lambda_n|(x^2 + |x|)^n)$ converge, donc $\lim_{N \mapsto +\infty} |h_N(x) - g_N(x)| = 0$ et par suite $f(x+x^2) = \lim_{N \mapsto +\infty} h_N(x)$. On retrouve bien le développement limité obtenu au II.1.b en changeant i en k et p_j en λ_j :

$\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{j}{k-j} \lambda_j \right) x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \mu_k x^k + o(x^n)$ car $\mu_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{j}{k-j} \lambda_j$ puisque $\binom{j}{k-j} = 0$ pour $k - j > j \Leftrightarrow j < k/2$.

4) (a) $\dfrac{1}{1 + x + x^2} = \dfrac{1 - x}{1 - x^3} = (1 - x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (x^{3n} - x^{3n+1})$. Le rayon de convergence est égal à 1 car $\lim_{n \mapsto +\infty} x^n = 0 \Leftrightarrow |x| < 1$.

(b) Pour $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$ on a $\lambda_n = (-1)^n$ donc $\mu_k = S_k$. On obtient donc en comparant avec le développement en série obtenu au II.4.a : $S_{3n} = 1$, $S_{3n+1} = -1$ et $S_{3n+2} = 0$.

partie III.

1) (a) La fonction a est continue et strictement croissante sur $I =]-1/2\,; +\infty[$; elle définit une bijection de I sur $J =]-1/4\,; +\infty[$. I est le plus grand possible car a atteint son minimum en $x = -1/2$. Pour $u \in J$ on a $a^{-1}(u) = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4u}}{2}$.

(b) Le cours donne $(1 + x)^{1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} x^n$ avec un rayon de convergence égal à 1. On en déduit

$a^{-1}(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{1/2}{n} \frac{(4u)^n}{2}$ avec un rayon de convergence égal à 1/4.

(c) En exprimant le développement limité à l'ordre n de $a^{-1}(u)$ on obtient $x = \sum_{k=0}^{n} b_k(x+x^2)^k + o(x^n)$ d'où en tronquant au degré n : $X = \sum_{k=0}^{n} b_k T_n((X+X^2)^k)$ qui montre bien que les coefficients b_k sont ceux de la deuxième colonne de Q_n qui exprime X en fonction des $T_n((X+X^2)^k)$.

(d) Pour $k \geqslant 1$,

$$\binom{1/2}{k} = \frac{(1/2)(-1/2)...(1/2-k+1)}{k!} = (-1)^{k-1}\frac{1\times 3\times ...\times (2k-3)}{2^k k!} = \frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^k k! 2^{k-1}(k-1)!} = \frac{(-1)^{k-1}\binom{2k-2}{k-1}}{2^{2k-1}k}.$$

On en déduit $b_k = \frac{(-1)^{k-1}\binom{2k-2}{k-1}4^k}{2^{2k-1}2k} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{2k-2}{k-1}$. C'est bien le résultat admis au I.5.e en posant $i = k$ et $j = 1$: $q_{k,1} = (-1)^{k+1}\frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}$.

2) (a) L'équation $z^2+z-w=0$ possède deux solutions dans $\mathbb{C}$ vérifiant $z_1+z_2=-1$; elles sont donc symétriques par rapport au point $-1/2$. L'application $\alpha : z \mapsto z+z^2$ soit encore $(x,y) \mapsto (x+x^2-y^2, y+2xy)$ est de classe C^1 sur Π.

Pour $x \neq -1/2$, $\alpha(x,y) = (x+x^2-y^2, y(1+2x))$ n'est pas sur la demi-droite $D =]-\infty; -1/4]$ car soit $y \neq 0$, soit $y = 0$ et $x+x^2 > -1/4$; par suite $\alpha(\Pi)$ est inclus dans le plan $\mathbb{R}^2$ privé de la demi-droite D. Réciproquement, si $w \in \mathbb{R}^2 - D$, le discriminant $\Delta = 1+4w$ n'est pas un réel négatif et donc les solutions de $z+z^2 = w$, $z = (-1\pm\delta)/2$, avec $\delta \notin \mathrm{i}\,\mathbb{R}$, ne sont pas sur la droite d'équation $x = -1/2$; par la symétrie par rapport au point $-1/2$, il y en a donc une seule dans Π et ainsi α est une bijection de Π sur $\mathbb{R}^2 - D$. Enfin, le jacobien de α est égal à $\begin{vmatrix} 1+2x & -2y \\ 2y & 1+2x \end{vmatrix} = (1+2x)^2+4y^2 \neq 0$ car $x \neq -1/2$. α est donc bien un C^1-difféomorphisme de Π sur $\mathbb{R}^2 - D$.

(b) Soit $k > -1/2$. La droite D_k a pour image par α l'ensemble des (u,v) avec $u = k+k^2-y^2$ et $v = (1+2k)y$ ($y \in \mathbb{R}$) qui a pour équation $v^2 = (1+2k)^2(k+k^2-u)$. Il s'agit d'une parabole d'axe Ou , de sommet $(k+k^2\,;0)$, de paramètre $(1+2k)^2/2$. Le foyer est donc le point de l'axe Ou d'abscisse $k+k^2-(1+2k)^2/4 = -1/4$. Il est bien le même pour toutes les paraboles.

3) D'après III.1.b le rayon de convergence de $(\sum b_k w^k)$ est égal à 1/4. $\beta(w)$ est donc défini pour $|w| < 1/4$. Sur ce disque, $\gamma(w) = \beta(w)^2+\beta(w)-w$ possède un développement en série entière $(\sum \gamma_k w^k)$. Pour $w = u \in \mathbb{R}$ et $|u| < 1/4$ on a $\beta(u)^2+\beta(u) = u$ puisque $\beta(u) = a^{-1}(u)$ et donc $\gamma(u) = 0$. Par unicité des coefficients d'un développement en série entière on déduit que les γ_k sont tous nuls d'où $\gamma(w) = 0$ pour $|w| < 1/4$, soit $\alpha(\beta(w)) = w$. Il reste à montrer que $\beta(w) \in \Pi$. $w = \rho\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}$ avec $\rho < 1/4$. $\beta(w) = \sum_{k=0}^{+\infty}\beta_k w^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\beta_k\rho^k\,\mathrm{e}^{\,k\,\mathrm{i}\,\theta}$ et a pour partie réelle $\sum_{k=0}^{+\infty}\beta_k\rho^k\cos(k\theta) \geqslant -\sum_{k=0}^{+\infty}|\beta_k|\rho^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\beta_k(-\rho)^k = a^{-1}(-\rho) > -1/2$ d'après III.1.a puisque $-\rho > -1/4$. On a donc bien montré que $\beta(w) \in \Pi$ et donc $\beta(w) = \alpha^{-1}(w)$.