

Concours E3A 2005
Math A - PC

Partie I

I.1 $T_2(X) = 2X^2 - 1$ et $T_3(X) = 4X^3 - 3X$.

I.2 Montrons par récurrence sur m que T_m est un polynôme de degré m , de coefficient dominant 2^{m-1} si $m \geq 1$ et vérifiant de plus $T_m(-X) = (-1)^m T_m(X)$ (ce qui entraîne que T_m a la parité de m). C'est vérifié pour $m = 1$ et $m = 2$. Supposons la propriété vraie pour $m - 1$ et m . De $T_{m+1}(X) = 2XT_m(X) - T_{m-1}(X)$ on déduit, puisque $\deg(T_{m-1}) = m - 1 < m + 1 = \deg(2XT_m)$, que T_{m+1} est de degré $m + 1$ et que son coefficient dominant est 2^m . De plus, $T_{m+1}(-X) = -2XT_m(-X) - T_{m-1}(-X) = (-1)^{m+1} T_{m+1}(X)$. La propriété est vraie au rang $m + 1$, elle est donc vraie pour tout m .

I.3 La famille (T_0, T_1, \dots, T_n) est composée de polynômes ayant des degrés distincts inférieurs ou égaux à n , elle est donc libre dans $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, son cardinal est égal à $n + 1$ qui est la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

I.4 a) On montre par récurrence sur n que $T_n(\cos x) = \cos(nx)$. C'est vérifié pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons la propriété vraie pour $n - 1$ et n . De $\cos(nx + x) + \cos(nx - x) = 2 \cos(nx) \cos(x)$ on déduit $\cos(nx + x) = 2 \cos(x) T_n(\cos x) - T_{n-1}(\cos x)$ d'où $\cos(nx + x) = T_{n+1}(\cos x)$. La propriété est vraie pour $n + 1$, elle est donc vraie pour tout n . La propriété $T_n(\operatorname{ch} x) = \operatorname{ch}(nx)$ se démontre de la même façon en remplaçant \cos par ch .

b) Si $|u| \leq 1$ il existe x tel que $u = \cos(x)$ donc $|T_n(u)| = |T_n(\cos x)| = |\cos(nx)| \leq 1$.

c) Si $u > 1$ il existe $x > 0$ tel que $u = \operatorname{ch}(x)$ donc $|T_n(u)| = |T_n(\operatorname{ch}(x))| = \operatorname{ch}(nx) > 1$ puisque $nx > 0$.

d) Si $u < -1$, $-u > 1$ donc $|T_n(u)| = |(-1)^n T_n(-u)| = |T_n(-u)| > 1$.

I.5 a) $T_n(\cos(x)) = 0 \Leftrightarrow \cos(nx) = 0 \Leftrightarrow nx = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{2k+1}{2n}\pi$ avec $0 \leq k \leq n - 1$ pour que $x \in [0, \pi]$.

b) Les nombres $\cos(\frac{2k+1}{2n}\pi)$ pour $0 \leq k \leq n - 1$ sont distincts deux à deux et compris entre -1 et 1 puisque \cos est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. T_n a donc n racines distinctes dans $[-1, 1]$. Il n'a pas d'autres racines puisqu'il est de degré n .

c)
$$T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) \right).$$

I.6 $\sum_{n=0}^{+\infty} t^n e^{inx} = \frac{1}{1 - te^{ix}}$ (série géométrique de raison te^{ix} de module inférieur à 1).

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \cos nx = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n e^{inx} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1 - te^{-ix}}{(1 - te^{ix})(1 - te^{-ix})} \right) = \frac{1 - t \cos x}{1 - 2t \cos x + t^2}.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \sin nx = \operatorname{Im} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n e^{inx} \right) = \frac{t \sin x}{1 - 2t \cos x + t^2}.$$

Partie II.A

II.A.1) L'application qui à (P, Q) associe $\langle P, Q \rangle = \int_0^\pi P(\cos x)Q(\cos x)dx$ est immédiatement

une forme bilinéaire symétrique. Elle est positive car $\langle P, P \rangle = \int_0^\pi (P(\cos x))^2 dx \geq 0$.

Elle est définie puisque $\langle P, P \rangle = \int_0^\pi (P(\cos x))^2 dx = 0$ entraîne par continuité de P et \cos que $P(\cos x) = 0$ sur $[0, \pi]$; P a une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.

II.A.2) a) On peut écrire puisque $p \neq q$ et $p \neq -q$:

$$\begin{aligned} \langle T_p, T_q \rangle &= \int_0^\pi T_p(\cos x)T_q(\cos x)dx = \int_0^\pi \cos(px) \cos(qx)dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((p+q)x) + \cos((p-q)x)dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((p+q)x)}{p+q} + \frac{\sin((p-q)x)}{p-q} \right]_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

b) $\langle T_0, T_0 \rangle = \pi$ et pour $n \geq 1$:

$$\langle T_n, T_n \rangle = \int_0^\pi (\cos(nx))^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(2nx) + 1)dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2nx)}{2n} + x \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

c) T_n est orthogonal à tous les polynômes T_k pour $0 \leq k \leq n-1$ qui forment une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, il est donc orthogonal à ce sous-espace.

d) Pour $n \geq 1$, $T_n = 2^{n-1}X^n + Q$ avec $\deg(Q) \leq n-1$; Q est donc orthogonal à T_n et par suite $\langle T_n, T_n \rangle = \langle T_n, 2^{n-1}X^n \rangle$ d'où $\langle T_n, X^n \rangle = \frac{1}{2^{n-1}} \langle T_n, T_n \rangle = \frac{\pi}{2^n}$.
C'est vrai aussi pour $n=0$ car $\langle T_0, 1 \rangle = \pi$.

II.A.3 La base (T_0, T_1, \dots, T_n) est orthogonale puisque $\langle T_p, T_q \rangle = 0$ si $p \neq q$.

Partie II.B

II.B.1 a) $c_0 = \sum_{k=1}^n 1 = n$.

b) $\sum_{k=1}^n (e^{ij\frac{\pi}{n}})^k = e^{ij\frac{\pi}{n}} \frac{1 - e^{ij\pi}}{1 - e^{ij\frac{\pi}{n}}} = e^{ij\frac{\pi}{n}} \frac{1 - (-1)^j}{1 - e^{ij\frac{\pi}{n}}}$ puisque $e^{ij\frac{\pi}{n}} \neq 0$ pour $1 \leq j \leq n-1$.

c) c_j est la partie réelle de $\sum_{k=1}^n e^{ijx_k} = e^{-ij\frac{\pi}{2n}} \sum_{k=1}^n e^{ijk\frac{\pi}{n}} = e^{ij\frac{\pi}{2n}} \frac{1 - (-1)^j}{1 - e^{ij\frac{\pi}{n}}} = \frac{1 - (-1)^j}{e^{-ij\frac{\pi}{2n}} - e^{ij\frac{\pi}{2n}}} = \frac{1 - (-1)^j}{-2i \sin \frac{j\pi}{2n}}$ qui est imaginaire pur, donc $c_j = 0$.

II.B.2 a) $I(T_p) = \langle T_p, T_0 \rangle = \pi$ si $p=0$ et 0 si $p > 0$.

$S_n(T_p) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n T_p(\cos(x_k)) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \cos(px_k) = \frac{\pi}{n} c_p$ d'où $S_n(T_p) = \pi$ si $p=0$ et 0 si $0 < p \leq n-1$. On a donc pour tout $p \in \{0, \dots, n-1\}$, $I(T_p) = S_n(T_p)$.

b) I et S_n sont clairement des formes linéaires sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$; comme elles coïncident sur la base $(T_0, T_1, \dots, T_{n-1})$, elles sont égales.

II.B.3 a) Si $Q \neq 0$, $\deg(QT_n) \geq n$ alors que $\deg(R) \leq n-1$; par suite, $\deg(QT_n) = \deg(P) \leq 2n-1$ donc $\deg(Q) \leq n-1$.

b) $I(P) = I(QT_n) + I(R) = \langle Q, T_n \rangle + I(R) = 0 + I(R) = I(R)$ car T_n est orthogonal à Q .

c) $S_n(P) = S_n(QT_n) + S_n(R)$ avec $S_n(QT_n) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n Q(\cos(x_k))T_n(\cos(x_k)) = 0$ puisque les $\cos(x_k)$ sont les racines de T_n . On a donc $S_n(P) = S_n(R)$ d'où pour $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $I(P) = I(R) = S_n(R) = S_n(P)$ (car $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$).

II.B.4 $I(T_{2n}) = \langle T_{2n}, T_0 \rangle = 0$ car $n \geq 1$.

$$S_n(T_{2n}) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n T_{2n}(\cos(x_k)) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \cos(2nx_k) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n (-1) = -\pi.$$

On en déduit que $I(P) = S_n(P)$ n'est pas vérifié pour un polynôme de degré $2n$.

Partie III

III.1 On choisit $a = 0$, $b = \pi$ et la fonction $f \circ \cos$ qui est continue sur $[0, \pi]$. Avec $p = n$ et $c_k = x_{k+1} = \frac{2k+1}{2n}\pi \in [\frac{k}{n}\pi, \frac{k+1}{n}\pi]$ on obtient par le théorème des sommes de Riemann : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \int_0^\pi f(\cos t) dt = I(f)$.

III.2 a) $f(t) = \ln((a-t)^2 + 1 - t^2)$ avec $(a-t)^2 \geq 0$ et $1-t^2 > 0$ pour $t \in]-1, 1[$; pour $t = 1$, $(a-1)^2 > 0$ et pour $t = -1$, $(a+1)^2 > 0$. f est donc définie sur $[-1, 1]$ et continue par continuité de \ln . On peut donc appliquer le résultat du III.1.

b) i. $z^{2n} = -1 \Leftrightarrow z = e^{(2k-1)i\frac{\pi}{2n}} = z_k$ avec $1 \leq k \leq 2n$. Puisque $\bar{z}_k = e^{-(2k-1)i\frac{\pi}{2n}} = e^{(4n-2k+1)i\frac{\pi}{2n}} = z_{2n-k+1}$ on déduit $\bar{z}_1 = z_{2n}$, ..., $\bar{z}_n = z_{n+1}$ donc les racines $(2n)^{\text{èmes}}$ de -1 sont : $e^{ix_1}, e^{ix_2}, \dots, e^{ix_n}, e^{-ix_1}, e^{-ix_2}, \dots, e^{-ix_n}$.

ii. $X^{2n} + 1 = \prod_{k=1}^n ((X - e^{ix_k})(X - e^{-ix_k}))$.

iii. $(X - e^{ix_k})(X - e^{-ix_k}) = X^2 - 2\cos(x_k)X + 1$ est un polynôme irréductible sur $\mathbb{R}[X]$ car ses racines e^{ix_k} et e^{-ix_k} ne sont pas réelles puisque $x_k \notin \pi\mathbb{Z}$. On obtient bien la factorisation proposée.

iv. $S_n(f) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \ln(a^2 - 2a\cos(x_k) + 1) = \frac{\pi}{n} \ln \prod_{k=1}^n (a^2 - 2a\cos(x_k) + 1) = \frac{\pi}{n} \ln(a^{2n} + 1)$.

c) Si $a \in]0, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{2n} = 0$ d'où $I(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = 0$. Si $a > 1$, $S_n(f) = \frac{\pi}{n} \ln(a^{2n}(1 + \frac{1}{a^{2n}})) = 2\pi \ln a + \frac{\pi}{n} \ln(1 + \frac{1}{a^{2n}})$. On en déduit $I(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = 2\pi \ln a$.

d) Si $a \in]0, 1[$, $S_n(f) - I(f) = S_n(f) \sim \frac{\pi}{n} a^{2n}$ puisque $\ln(1+x) \sim x$ au voisinage de 0. Si $a > 1$, $S_n(f) - I(f) = \frac{\pi}{n} \ln(1 + \frac{1}{a^{2n}}) \sim \frac{\pi}{na^{2n}}$.