D25A

CONCOURS ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B PC

durée 3 heures

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Exercice 1

On désigne par n un entier naturel non nul et par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels.
Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième du polynôme P.

Soit A un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$. A tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on associe le polynôme $(AP)^{(n)}$, c'est à dire le polynôme dérivée n-ième du produit AP.

1. Soient P et A dans $\mathbb{R}_n[X]$.
   (i) Exprimer le degré de $(AP)^{(n)}$ en fonction de n et des degrés de A et de P.
   (ii) En déduire que $(AP)^{(n)} \in \mathbb{R}_n[X]$.

On considère :

$$\begin{array}{rccc} \Phi_A : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \longmapsto & (AP)^{(n)} \end{array}$$

On admet que Φ_A est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Etude de deux exemples:

   a) $n = 3$ et $A = X^3 - 1$

      (i) Exprimer $\Phi_{(X^3-1)}(1)$, $\Phi_{(X^3-1)}(X)$, $\Phi_{(X^3-1)}(X^2)$ et $\Phi_{(X^3-1)}(X^3)$. En déduire la matrice de $\Phi_{(X^3-1)}$ dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$

      (ii) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de $\Phi_{(X^3-1)}$.

      (iii) $\Phi_{(X^3-1)}$ est-il diagonalisable? Est-ce un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$?

   b) $n = 3$ et $A = X^2 + X + 1$

      (i) Ecrire la matrice de $\Phi_{(X^2+X+1)}$ dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$

      (ii) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\Phi_{(X^2+X+1)}$

      (iii) $\Phi_{(X^2+X+1)}$ est-il diagonalisable? Est-ce un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$?

3. Cas général: On note d le degré de A et on pose $A(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$.

   (i) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur le polynôme A pour que Φ_A soit un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (ii) Exprimer la matrice de Φ_A dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et montrer qu'elle est triangulaire supérieure.

   (iii) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur le polynôme A pour que Φ_A soit diagonalisable.

Exercice 2

1. Montrer que :
   $\forall\ u \in \mathbb{R}_+^*, \qquad 0 \leqslant \text{Arctan}(u) \leqslant u$.

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Montrer que la fonction:

$$f_x : \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} & & \\ t & \longmapsto & f_x(t) & = & \dfrac{t}{(t^2+x^2)}\text{Arctan}(\dfrac{1}{t}) \end{array}$$

   est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. On considère :

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+x^2)}\mathrm{Arctan}(\frac{1}{t})dt \end{array}$$

a) (i) Déduire de la question 1. l'encadrement :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad 0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{\pi}{2x}.$$

(ii) Montrer que g admet une limite quand x tend vers $+\infty$. Quelle est cette limite?

b) (i) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{\pi}{8}\ln(\frac{x^2+1}{x^2}) \leq \int_0^{+1} \frac{t}{(t^2+x^2)}\mathrm{Arctan}(\frac{1}{t})dt$

(ii) En déduire le comportement de g quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

4. a) Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $a < b$, montrer que :

$$\begin{array}{rccl} \varphi: &]a,b[\times\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \longmapsto & \varphi((x,t)) = \dfrac{t}{(t^2+x^2)}\mathrm{Arctan}(\dfrac{1}{t}) \end{array}$$

est de classe C^1 sur $]a,b[\times\mathbb{R}_+^*$, et que:

$$\forall\ (x,t) \in]a,b[\times\mathbb{R}_+^*, \qquad |\frac{\partial\varphi}{\partial x}((x,t))| \leq \frac{2bt}{(t^2+a^2)^2}\mathrm{Arctan}(\frac{1}{t}).$$

b) Montrer, en énonçant avec précision le théorème utilisé, que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = -2xh(x)$$

en posant $h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+x^2)^2}\mathrm{Arctan}(\frac{1}{t})dt.$

c) En déduire le sens de variation de g sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}_-^*$.

5. a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ différent de 1. Déterminer A et B tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{(t^2+x^2)(t^2+1)} = \frac{A}{(t^2+x^2)} + \frac{B}{(t^2+1)}.$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ différent de 1. à l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$h(x) = \frac{\pi}{4x^2(x+1)}.$$

c) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h(x) = \frac{\pi}{4x^2(x+1)}.$$

6. En déduire $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

7. En déduire $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, puis pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$.

Exercice 3

Soit E un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
(Γ) est l' arc paramétré défini par l'application :

$$f : \mathbb{R} \to E$$
$$t \longmapsto M(t) \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 2t) \\ y(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$$

où $(x(t); y(t))$ sont les coordonnées de $M(t)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Quelles sont les valeurs de t pour lesquels le point $M(t)$ est singulier ?
2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Déterminer la tangente au point $M(t)$.
3. Décrire la position de la courbe (Γ) par rapport à la tangente aux points suivants :
   a) au point O correspondant à la valeur $t = 0$ du paramètre
   b) au point A correspondant à la valeur $t = 1$ du paramètre.
4. Représenter la courbe (Γ).
5. On considère deux points de (Γ), M de paramètre t et M_1 de paramètre t_1.
   a) Montrer que, pour que les tangentes à (Γ) en M et en M_1 soient perpendiculaires, il faut et il suffit que :

$$1 + t.t_1 = 0$$

b) Soit P le point d'intersection de ces deux tangentes, lorsqu'elles sont perpendiculaires. Démontrer que les coordonnées $(x_P(t), y_P(t))$ du point P, en fonction de $t \in \mathbb{R}^*$ sont :

$$\begin{cases} x_P(t) & = & \dfrac{t^4 - 3t^3 - t^2 + 3t + 1}{6t^2} \\ \\ y_P(t) & = & \dfrac{-t^2 + 3t + 1}{6t} \end{cases}$$

6. a) Montrer que l'ensemble des points du plan d'où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires à (Γ) est une parabole (Γ_1) dont une équation est:

$$6y^2 - 3y - x + \frac{1}{6} = 0$$

b) Déterminer le sommet, le foyer, la directrice et l'axe de cette parabole.