e3a concours

CONCOURS ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B PC

durée 3 heures

L'usage de la calculatrice est interdit

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire défini par :

$$\forall (P,Q) \in E^2, < P, Q >= \int_{-1}^{0} P(t)Q(t)dt.$$

On ne demande pas de vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Soit Δ l'application de E dans E qui envoie un polynôme P sur :

$$\Delta(P) = (X^2 + X)P" + (2X+1)P',$$

où l'on note respectivement P' ou $P'(X)$, ainsi que $P"$ ou $P"(X)$ les dérivées premières et deuxièmes de P.

1. Vérifier que Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.
2. Soit $P \in E$. Montrer que le degré de $\Delta(P)$ est inférieur ou égal au degré de P.

Pour tout entier naturel non nul n, on note E_n le sous-espace vectoriel de E formé par les polynômes de degré $\leqslant n$. On note Δ_n l'endomorphisme induit par Δ sur E_n, c'est à dire :

$$\forall P \in E_n, \Delta_n(P) = \Delta(P).$$

3. Ecrire la matrice de Δ_n sur la base $\{1, X, ..., X^n\}$.
4. En déduire les valeurs propres de Δ_n.
5. L'endomorphisme Δ_n est-il diagonalisable?
6. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, il existe un unique polynôme P_n de degré n et de coefficient dominant égal à 1 tel que $\Delta(P_n) = n(n+1)P_n$.
7. Exprimer P_n en fonction du polynôme
$$Q_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{(n-k)!(k!)^2} X^k.$$
8. Montrer que, pour tous P et Q dans E, on a :
$$< \Delta(P), Q > = < P, \Delta(Q) > .$$
9. En déduire $< P_n, P_m >$ pour deux entiers naturels non nuls $n \neq m$.

Exercice 2

Le but de l'exercice est de déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, solutions de l'équation (*) :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

1. Déterminer les solutions constantes.
2. Soit f une solution **non constante.**

(i) Montrer que $f(0) = 1$ et que $f'(0) = 0$.

(ii) Montrer que f est une fonction paire.

3. Soit f une solution **non constante.** On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$F(x, y) = f(x + y) + f(x - y).$$

(i) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

(ii) Calculer les dérivées partielles secondes de F.

(iii) Des expressions de $\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}$, déduire que f vérifie une équation différentielle de la forme :

$$f'' - \alpha f = 0.$$

Donner les solutions de cette équation selon les valeurs de α.

4. Déterminer toutes les solutions de l'équation (*).

Exercice 3

Soit P un plan affine Euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit M un point de P distinct de O. On note M' l'unique point sur la droite OM tel que $\overline{OM}.\overline{OM'} = 1$. On remarquera que M' est distinct de O.

1. Exprimer $\overrightarrow{OM'}$ en fonction de $\overrightarrow{OM}$ et $\|\overrightarrow{OM}\|$.

2. Exprimer les coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ de M' en fonction des coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de M.

On note σ l'application définie ci-dessus de $P \setminus \{O\}$ dans lui-même définie par $\sigma(M) = M'$.

3. Montrer que $\sigma^2 = Id$. En déduire que σ est une bijection de $P \setminus \{O\}$ sur lui-même.

4. Soit D une droite du plan P passant par le point O. Montrer que :

$$\sigma(D \setminus \{O\}) = D \setminus \{O\}.$$

5. On considère R la région du plan définie par :

$$R = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ / -x < y < x \}.$$

Montrer que $\sigma(R) = R$.

6. On considère S et T les régions du plan définies par :

$$\begin{aligned} S &= \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ / -x < y < x \ \text{ et } \ x \geqslant 1 \}, \\ T &= \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ / -x < y < x \ \text{ et } \ (x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 \leqslant \tfrac{1}{4} \}. \end{aligned}$$

Représenter sur un graphique les régions S et T. Montrer que $\sigma(S) \subset T$.

On considère la courbe $\mathcal{H}$ de P définie par l'équation $x^2 - y^2 = 1$ avec $x > 0$.

7. Quelle est la nature de $\mathcal{H}$? représenter $\mathcal{H}$.

8. Montrer que $\sigma(\mathcal{H}) \subset T$.

9. Montrer que la courbe $\mathcal{H}$ peut être paramétrée par

$$\begin{cases} x = 1/\cos u \\ y = \tan u \end{cases} ; \ u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

10. En déduire que la courbe $\sigma(\mathcal{H})$ est paramétrée par :

$$\begin{cases} x = \cos u/(1 + \sin^2 u) \\ y = \sin u \cos u/(1 + \sin^2 u) \end{cases} ; \ u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

11. En introduisant la variable θ telle que $\tan\theta = \sin u$, démontrer que la courbe $\sigma(\mathcal{H})$ admet pour équation polaire $r = \sqrt{\cos 2\theta}$ avec $\theta \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$.

10. Représenter $\sigma(\mathcal{H})$.