$$\boxed{\textbf{Corrigé E3A maths B PC}}$$

Exercice 1

1. Si $P \in E$, $\Delta(P) \in E$. De plus, la linéarité de la dérivation et les propriétés d'algèbre de E assurent la linéarité de Δ.

2. Pour tout $P \in E$, en adoptant la convention usuelle $\deg(0) = -\infty$:
$\deg((2X+1)P') = 1 + \deg(P') \le \deg(P)$ avec égalité si $P' \neq 0$ et $\deg((X^2+X)P'') = 2 + \deg(P'') \le \deg(P)$ avec égalité si $P'' \neq 0$.
On en déduit que $\deg(\Delta(P)) \le \deg(P)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est donc stable par Δ et on note Δ_n, l'endomorphisme induit par Δ sur E_n.

3.
$$\begin{cases} \Delta(1) = 0 \\ \Delta(X) = 2X+1 \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta(X^k) = k(k+1)X^k + k^2 X^{k-1}. \end{cases}$$
On en déduit la matrice $M_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de Δ_n dans la base $(1, X, \dots, X^n)$:

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 2 & 2^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & k^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & k(k+1) & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & n^2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

4. Comme M_n est triangulaire, ses valeurs propres sont les éléments diagonaux et en notant $\mathrm{Sp}(\Delta_n)$ le spectre de Δ_n,
$$\boxed{\mathrm{Sp}(\Delta_n) = \{\, k(k+1) \mid k \in [\![0, n]\!] \,\}}$$

5. Soit $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x(x+1) \end{array} \right.$. φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\varphi'(x) = 2x+1 > 0$: on en déduit que φ est injective.
Δ_n admet donc $n+1$ valeurs propres distinctes. Comme $\dim(\Delta_n) = n+1$, Δ_n est diagonalisable et ses sous espaces propres ont tous pour dimension 1.

6. D'après ce qui précède, $n(n+1)$ est valeur propre de Δ_n et le sous espace propre associé F est de dimension égale à 1. Soit Q un élément non nul de F et α_Q son coefficient dominant. ($\alpha_Q \neq 0$).
$P_n = \dfrac{1}{\alpha_Q} Q$ est le seul élément de F qui ait un coefficient dominant égal à 1.
D'autre part, $\deg(P_n) \le n$ car $P_n \in E_n$.
Si $\deg(P_n) < n$, P_n serait un vecteur propre de Δ_{n-1} associé à la valeur propre $n(n+1)$, ce qui est absurde car $n(n+1) \notin \mathrm{Sp}(\Delta_{n-1})$. Donc $\deg(P_n) = n$.

7. Q_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant égal à $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.

$$\begin{aligned}
\Delta_n(Q_n) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+k)!}{(n-k)!\,(k!)^2} \big(k(k+1)X^k + k^2 X^{k-1}\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+k)!\,k(k+1)}{(n-k)!\,(k!)^2}\, X^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+k)!}{(n-k)!((k-1)!)^2}\, X^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+k)!\,k(k+1)}{(n-k)!\,(k!)^2}\, X^k + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n+p+1)!}{(n-p-1)!((p-1)!)^2}\, X^p \\
&= \frac{n(n+1)(2n)!}{(n!)^2}\, X^n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n+k)!}{(n-k)!(k!)^2} \big(k(k+1) + (n+k+1)(n-k)\big)\, X^k + n(n+1)X^0
\end{aligned}$$

Comme $k(k+1)+(n+k+1)(n-k)=n(n+1)$, on obtient finalement $\Delta_n(Q_n)=n(n+1)Q_n$.
Comme le sous espace propre F relatif à la valeur propre $n(n+1)$ est de dimension 1, que le coefficient dominant de Q_n est $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$, on en déduit que $P_n=\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\,Q_n$.

8. Soit P et Q dans E.
$(\Delta(P)\,|\,Q)=\displaystyle\int_{-1}^{0}(t^2+t)P''(t)Q(t)\,\mathrm{d}t+\int_{-1}^{0}(2t+1)P'(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$
En transformant la première intégrale à l'aide d'une intégration par parties, on obtient :
$(\Delta(P)\,|\,Q)=\Big[(t^2+t)Q(t)P'(t)\Big]_{-1}^{0}-\displaystyle\int_{-1}^{0}P'(t)\big((t^2+t)Q'(t)+(2t+1)Q(t)\big)\,\mathrm{d}t+\int_{-1}^{0}(2t+1)P'(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$
Soit finalement $(\Delta(P)\,|\,Q)=-\displaystyle\int_{-1}^{0}(t^2+t)Q'(t)P'(t)\,\mathrm{d}t$
On a donc $(P\,|\,\Delta(Q))=(\Delta(Q)\,|\,P)=-\displaystyle\int_{-1}^{0}(t^2+t)P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t=(\Delta(P)\,|\,Q)$
Δ est un endomorphisme autoadjoint de E.

9. *On sait que les sous espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien sont deux à deux orthogonaux : ce résultat est encore vrai dans le cadre d'un espace préhilbertien réel*
Soit n et m deux entiers naturels distincts.
$(\Delta(P_n)\,|\,P_m)=(P_n\,|\,\Delta(P_m))$. Or $\Delta(P_n)=n(n+1)\,P_n$ et $\Delta(P_m)=m(m+1)\,P_m$.
On obtient donc $(n(n+1)-m(m+1))\;(P_n\,|\,P_m)=0$. On a déjà remarqué que si n et m sont deux entiers distincts, $n(n+1)\neq m(m+1)$.
On en déduit que $(P_n\,|\,P_m)=0$.
rque : l'hypothèse n et m non nuls est inutile

Exercice 2

1. Si f est une fonction constante de valeur c, f est bien de classe $\mathcal{C}^2$ et f est solution de $(*)$ si et seulement si $c^2=c$, ce qui équivaut à $c=0$ ou $c=1$.

1. Soit f une solution non constante de $(*)$.
(i) En spécialisant y par 0, $\forall x\in\mathbb{R},\quad 2f(x)=2f(x)f(0)$.
Comme f n'est pas constante, il existe $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $f(x_0)\neq 0$ et on en déduit $\boxed{f(0)=1}$.

En dérivant l'égalité $(*)$ par rapport à y :
$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R},\quad f'(x+y)-f'(x-y)=2f(x)\,f'(y)$.
En particulier pour $x=y=0$, $0=2f'(0)$ d'où $\boxed{f'(0)=0}$

(ii)
Pour $x=0$, $\forall y\in\mathbb{R},\quad f(y)+f(-y)=2f(y)$ d'où $f(-y)=f(y)$: $\boxed{f\text{ est paire}}$
rque : de f paire et $\mathcal{C}^1$, on déduisait sans calcul supplémentaire que f' était impaire et donc que $f'(0)=0$

3. 3 (i) Les applications $(x,y)\mapsto x+y$ et $(x,y)\mapsto x-y$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$: on déduit par théorèmes de composition et d'opérations que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
3 (ii) Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)&=f'(x+y)+f'(x-y)\\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)&=f'(x+y)-f'(x-y).\end{aligned}\right.\qquad\left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)&=f''(x+y)+f''(x-y)\\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)&=f''(x+y)+f''(x-y)\\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}(x,y)&=f''(x+y)-f''(x-y)=\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}(x,y).\end{aligned}\right.$$

Car d'après le théorème de Schwarz, comme F est de classe $\mathcal{C}^2$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}$.
On en déduit que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$
3 (iii)
On a aussi $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad F(x,y)=2f(x)f(y)$, d'où l'on déduit que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2f(y)\,f'(x) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2f(x)\,f'(y) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = 2f(y)\,f''(x) \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = 2f(x)\,f''(y) \end{cases}$$

On déduit de **3 (ii)** que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(y)f''(x) = f(x)f''(y)$
En particulier, avec $y = 0$, en posant $\alpha = f''(0)$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = \alpha f(x). \quad (\mathcal{E})$$

- Si $\alpha = 0$, les solutions de $(\mathcal{E})$ sont les fonctions $y : x \mapsto ax + b$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
- Si $\alpha < 0$, les solutions de $(\mathcal{E})$ sont les fonctions $y : x \mapsto A\cos\omega x + B\sin\omega x$ où $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ et $\omega = \sqrt{-\alpha}$.
- Si $\alpha > 0$, les solutions de $(\mathcal{E})$ sont les fonctions $y : x \mapsto A\,\mathrm{ch}\,\omega x + B\,\mathrm{sh}\,\omega x$ où $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ et $\omega = \sqrt{\alpha}$.

4. Soit f une solution non constante de $(*)$. Elle est d'un des trois types précédents. On sait de plus que $f(0) = 1$ et que f est paire .
La seule fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ qui vérifie $f(0) = 1$ et f paire est la fonction constante de valeur 1. Ce cas a été exclu.

Si $f : x \mapsto A\cos\omega x + B\sin\omega x$. $f(0) = 1$ entraîne $A = 1$ et f paire entraîne $B = 0$.
Réciproquement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos\omega x$,
Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$f(x+y) + f(x-y) = 2\cos\omega x\,\cos\omega y = 2f(x)\,f(y)$.
En utilisant les formules : $\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \\ \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b \end{cases}$

Si $f : x \mapsto A\,\mathrm{ch}\,\omega x + B\,\mathrm{sh}\,\omega x$. $f(0) = 1$ entraîne $A = 1$ et f paire entraîne $B = 0$.
Réciproquement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{ch}\,\omega x$,
Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) + f(x-y) = 2\,\mathrm{ch}\,\omega x\ \mathrm{ch}\,\omega y = 2f(x)\,f(y)$.
En utilisant les formules : $\begin{cases} \mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b + \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b \\ \mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b - \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b \end{cases}$
Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, notons g_ω (resp h_ω) l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_\omega(x) = \cos\omega x$ (resp $h_\omega(x) = \mathrm{ch}\,\omega x$).
En remarquant que $g_0 = h_0$ est la fonction constante de valeur 1,

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (*) \text{ est } \{\,0\,\} \cup \{\,g_\omega \mid \omega \in \mathbb{R}\,\} \cup \{\,h_\omega \mid \omega \in \mathbb{R}\,\}.}$$

Exercice 3

1. $\forall M \in P \setminus \{\,O\,\}, \quad \overrightarrow{OM'} = \dfrac{1}{\|\,\overrightarrow{OM}\,\|^2}\,\overrightarrow{OM}$

2. $\begin{cases} x' = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ y' = \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$

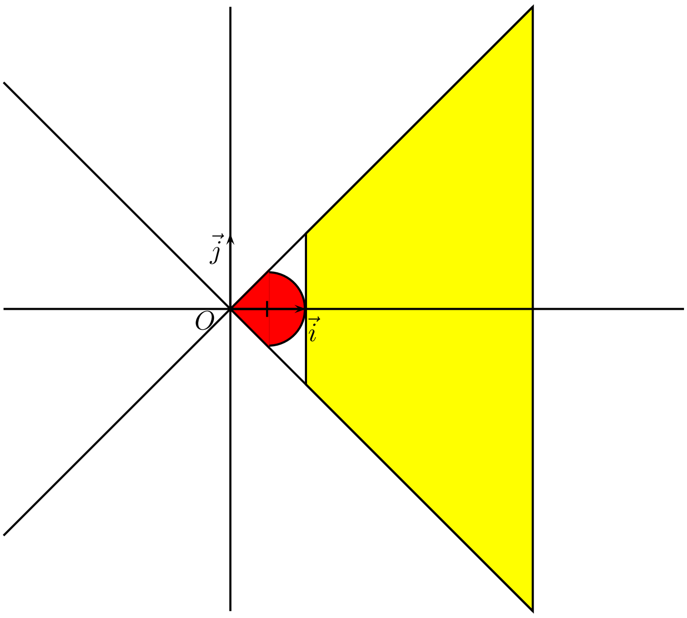
3. Remarquons qu'effectivement si $M \in P \setminus \{\,0\,\}$, $M' \in P \setminus \{\,O\,\}$. On peut donc définir $M'' = \sigma(M')$.
Pour tout $M \in P \setminus \{\,O\,\}$,
$\overrightarrow{OM''} = \dfrac{1}{\|\,\overrightarrow{OM'}\,\|^2}\,\overrightarrow{OM'} = \|\,\overrightarrow{OM}\,\|^2\,\dfrac{1}{\|\,\overrightarrow{OM}\,\|^2}\,\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}$ d'où $M'' = M$

et par conséquent, $\boxed{\sigma^2 = Id}$.
On en déduit que σ est une bijection de $P \setminus \{\,O\,\}$ sur lui même, et que $\sigma^{-1} = \sigma$.

4. Soit D une droite passant par O.
Pour tout $M \in D \setminus \{\,O\,\}$, le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$, donc $M' \in D$ et même $M' \in D \setminus \{\,O\,\}$ car $M' \in P \setminus \{\,O\,\}$.
On en déduit que $\sigma\,(\,D \setminus \{\,0\,\}\,) \subset D \setminus \{\,0\,\}$.
En appliquant $\sigma^{-1} = \sigma$, on a $D \setminus \{\,0\,\} \subset \sigma\,(\,D \setminus \{\,0\,\}\,)$ d'où

$$\boxed{\sigma\,(\,D \setminus \{\,0\,\}\,) = D \setminus \{\,0\,\}.}$$

5. Pour tout réel θ, notons $\overrightarrow{u_\theta} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$ et D_θ la droite passant par O et dirigée par $\overrightarrow{u_\theta}$.
$R = \bigcup_{-\pi/4<\theta<\pi/4}\Big(D_\theta \setminus \{\, O \,\}\Big)$ donc
$\sigma(R) = \bigcup_{-\pi/4<\theta<\pi/4} \sigma\Big(D_\theta \setminus \{\, O \,\}\Big) = \bigcup_{-\pi/4<\theta<\pi/4}\Big(D_\theta \setminus \{\, O \,\}\Big) = R$

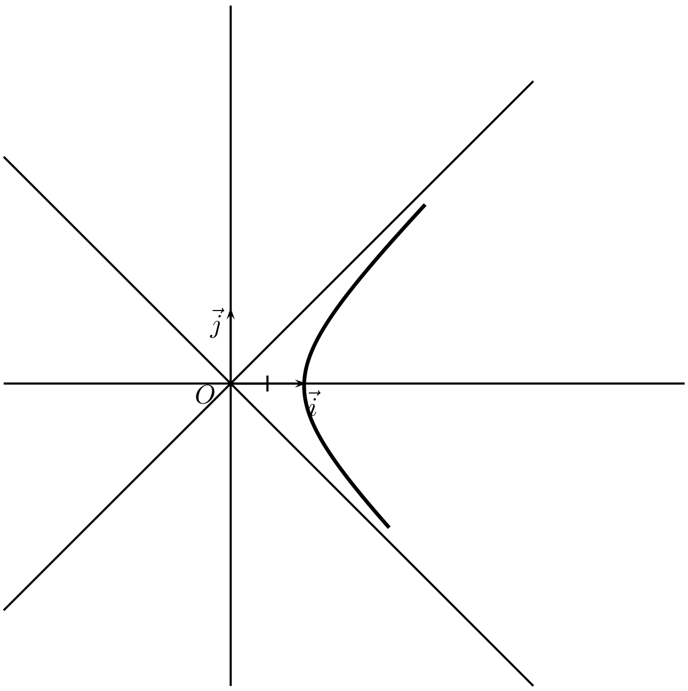


S, représentée en jaune sur le dessin est l'intersection de R et du demi plan d'équation $x \geq 1$.
T représenté en rouge est l'intersection de R et du disque fermé C de centre $A(1/2, 0)$ et de rayon 1.

Soit $M(x, y) \in S$ et $M' = \sigma(M)$. Comme $\sigma(R) = R$, $M' \in R$. Montrons que $M' \in C$:
$(x' - 1/2)^2 + y'^2 - 1/4 = x'^2 + y'^2 - x' = \| \overrightarrow{OM'} \|^2 - x' = \dfrac{1}{x^2 + y^2} - \dfrac{x}{x^2 + y^2} \leq 0$ car $x \geq 1$.

On en déduit que pour tout $M \in S$, $M' \in T$: $\boxed{\sigma(S) \subset T}$

7.



$\mathcal{H}$ est une branche d'hyperbole incluse dans S.

8. Comme $\mathcal{H} \subset S$, $\sigma(\mathcal{H}) \subset T$.

9. $\mathcal{H}$ peut être paramétrée par : $\left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{1 + y^2} \\ y = y \end{array} \right. \qquad y \in \mathbb{R}$

Posons $u = \arctan y$, on obtient un nouveau paramétrage de $\mathcal{H}$: $\left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{1 + \tan^2 u} = \dfrac{1}{\cos u} \\ y = \tan u \end{array} \right. \qquad u \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$

10. Soit $M(x,y)\in P$. $M\in\sigma(\mathcal{H}) \iff \exists N\in\mathcal{H},\quad M=\sigma(N)$.
En utilisant la question **2** et la paramétrisation précédente de $\mathcal{H}$,

$$M\in\sigma(\mathcal{H}) \iff \exists u \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\quad \begin{cases} x=\dfrac{X}{X^2+Y^2}\\ y=\dfrac{Y}{X^2+Y^2}\\ X=\dfrac{1}{\cos u}\\ Y=\tan u\end{cases}$$

De $\dfrac{1}{\cos^2 u}+\tan^2 u=\dfrac{1+\sin^2 u}{\cos^2 u}$, on déduit finalement :

$$M\in\sigma(\mathcal{H}) \iff \exists u \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\quad \begin{cases} x=\dfrac{\cos u}{1+\sin^2 u}\\ y=\dfrac{\sin u\cos u}{1+\sin^2 u}\end{cases}$$

11. Soit $u\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\theta=\arctan(\sin u)$
$\sin u$ décrit $]-1,1[$ et θ décrit $\left]-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right[$. L'application $\arctan\circ\sin$ établit même une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right[$.
De plus, $1+\sin^2 u=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$.

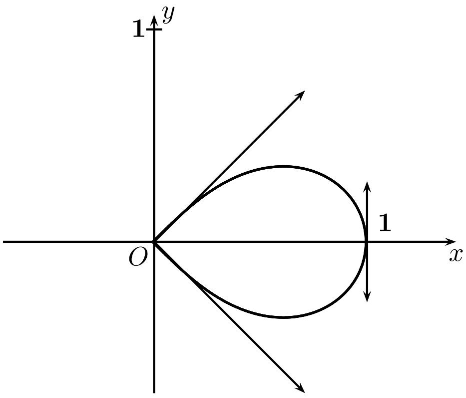
$\cos u=\sqrt{1-\sin^2 u}=\sqrt{\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}=\dfrac{\sqrt{\cos(2\theta)}}{\cos\theta}$ car $\cos\theta>0$.

$$M\in\sigma(\mathcal{H}) \iff \exists \theta \in \left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[,\quad \begin{cases} x=\sqrt{\cos(2\theta)}\,\cos\theta\\ y=\sqrt{\cos(2\theta)}\,\cos\theta\,\tan\theta=\sqrt{\cos(2\theta)}\,\sin\theta\end{cases}$$

On en déduit une équation polaire de $\sigma(\mathcal{H})$: $r=\sqrt{\cos(2\theta)}$ avec $\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right[$.

12.
Notons $\Gamma=\sigma(\mathcal{H})$.
La fonction $\theta\mapsto r(\theta)$ est paire : on l'étudie sur $[0,\pi/4[$ puis on effectuera une symétrie par rapport à Ox.
$\forall\theta\in[0,\pi/4[\quad r'(\theta)=-\dfrac{\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$.

θ	0		$\pi/4$
$r'(\theta)$	0	$-$	$\|\|$
$r(\theta)$	1	$\searrow$	0



Demi-lemniscate