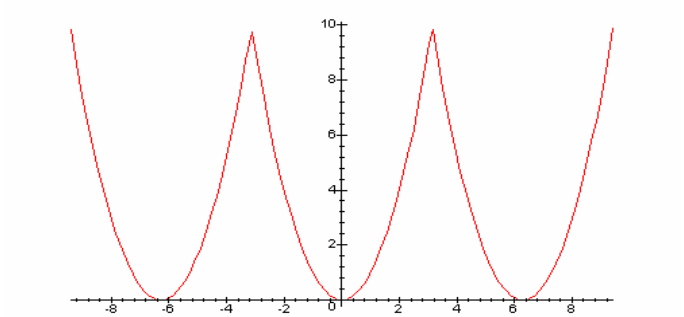
E3A 2003 PC
Epreuve de mathématiques A
Corrigé

Partie I

1) On obtient de suite la courbe suivante :



2) f est de classe C^1 sur $[-\pi, \pi]$, 2π-périodique, et $f(-\pi)=f(\pi)$. Il s'en suit que <u>f est continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.</u>

3) Par parité, on obtient : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, b_n = 0}$.

Avec une double intégration par parties, on obtient : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 4\frac{(-1)^n}{n^2}}$.

Enfin, une intégration directe fournit : $\boxed{a_0 = \frac{2\pi^2}{3}}$.

4) f est périodique, continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Donc la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$. On a en particulier la convergence simple qui permet d'écrire :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)}.$$

5) Pour x=0, la formule ci-dessus fournit : $0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, et donc $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}}$.

On trouve de même avec $x=\pi$: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$.

Partie II

1) Soit n un entier naturel. f_n est alors continue sur $]0,1]$, et on a au voisinage de 0 :

$$f_n(t) =_{t\to 0} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

Or, la fonction $t \to \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur]0, 1]. Donc <u>f_n est intégrable sur]0, 1].</u>

<u>Autre preuve</u> :

Pour $n \geq 1$, f_n est en fait prolongeable par continuité au segment [0, 1], et est donc à ce titre intégrable sur [0, 1].

Le cas n=0 est par ailleurs bien connu, et peut par exemple se traiter par un calcul direct de la limite de l'intégrale en remarquant que f_n est de signe constant sur]0, 1].

Pour $\varepsilon \in]0, 1]$, on fait une intégration par parties :

$$\int_\varepsilon^1 t^n \ln(t)\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t)\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{t^n}{n+1}\,dt$$

En remarquant l'intégrabilité sur [0, 1] de $t \to \frac{t^n}{n+1}$ (car continue sur le segment [0, 1]), on obtient alors, en faisant tendre ε vers 0 par valeurs supérieures :

$$\int_0^1 t^n \ln(t)\,dt = -\int_0^1 \frac{t^n}{n+1}\,dt = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Finalement : $\boxed{u_n = -\frac{1}{(n+1)^2}}$.

2-i) On sait que pour $t \in]-1, 1[$, on a : $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = \frac{1}{1+t}$.

On en déduit que, pour $t \in]0, 1[$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \ln(t) = \frac{\ln(t)}{1-t} \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \ln(t) = \frac{\ln(t)}{1+t}.$$

En d'autres termes :

$\sum f_n$ converge simplement vers $-g$ et $\sum (-1)^n f_n$ converge simplement vers h sur]0, 1[.

2-ii) <u>Intégrabilité de g</u> :

g est de signe constant sur]0, 1[et on a $g(t) \sim_{t\to 0} -\ln(t)$ et on a déjà vu l'intégrabilité de **ln** sur]0, ½]. Par ailleurs, le changement de variable t=1-h montre aisément que $\lim_{t\to 1} g(t) = 1$ et donc g est continue, donc intégrable sur le segment [½, 1]. Au final, <u>g est intégrable sur]0, 1[</u>.

<u>Intégrabilité de h</u> :

h est continue sur]0, 1], de signe constant, et $h(t) \sim_{t\to 0} \ln(t)$, ce qui assure de même que <u>h est intégrable sur]0, 1[</u>.

<u>Calcul de I</u> :

- Les applications f_n sont toutes continues et intégrables sur]0, 1[et $\sum f_n$ converge simplement vers $-g$ sur cet intervalle, et $-g$ est continue.
- La série numérique $\sum \int_0^1 |f_n|$, en d'autre termes la série $\sum -u_n = \sum \frac{1}{(n+1)^2}$ est convergente.

Donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions, on a :

$$\int_0^1 -g = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(n+1)^2} = -\frac{\pi^2}{6}$$

Et donc : $\boxed{I = \int_0^1 g = \frac{\pi^2}{6}}$.

<u>Calcul de J</u> :

La même utilisation du théorème montre que :

$$\int_0^1 h = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Et donc : $\boxed{J = -\frac{\pi^2}{12}}$.

Partie III

1) h_n est continue sur]0, 1] et on a en 0 : $|h_n(t)| \underset{t\to 0}{\sim} |f_n(t)|$ et on a déjà établi l'intégrabilité de f_n sur]0, 1]. Donc <u>h_n est intégrable sur]0, 1]</u>.

2) On a clairement :

- Les h_n sont toutes continues et intégrables sur]0, 1], donc a fortiori sur]0, 1[.
- (h_n) converge simplement sur]0, 1[vers la fonction nulle θ qui est continue.
- Pour tout $t \in]0, 1[$, la suite numérique $(h_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

De plus, θ est intégrable sur]0, 1[, donc la suite $\left(\int_0^1 h_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_0^1 \theta = 0$. En d'autres termes : $\boxed{\lim_{n\to\infty} J_n = 0}$.

3-i) On applique cette fois le théorème de convergence monotone pour les séries de fonctions :

- Les h_n sont toutes continues et intégrables sur]0, 1], donc a fortiori sur]0, 1[.
- $\sum h_n$ converge simplement vers u : $t \to \frac{\ln(t)}{1-t^2}$ sur]0, 1[, et u est continue sur]0, 1[.
- Les h_n sont toutes négatives.

De plus, u est intégrable sur]0, 1[: en effet u est continue sur]0, 1[et on a $|u(t)| \underset{t\to 0}{\sim} -\ln(t)$, fonction dont on a déjà démontré l'intégrabilité sur]0, 1], donc a fortiori sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$; enfin, $u(t) \underset{t\to 1}{\sim} \frac{t-1}{2(1-t)} = -\frac{1}{2}$ et donc u est intégrable sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$.

Donc la série $\sum \int_0^1 h_n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 h_n = \int_0^1 u$. En d'autres termes : $\boxed{S = \sum_{n=0}^{\infty} J_n = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2} dt}$.

3-ii) En reprenant cette dernière écriture, on a :

$$S=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\ln(t)\,dt=\frac{1}{2}(J-I)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi^2}{12}-\frac{\pi^2}{6}\right).$$

Donc : $\boxed{S=-\frac{\pi^2}{8}}$.

4) On a vu que $\sum J_n$ converge, et de plus : $\forall n\in\mathbb{N}, J_n\le 0$. Donc $\sum|J_n|=\sum -J_n$ converge. Par suite, $\sum(-1)^n J_n$ converge absolument.

Partie IV

1) On a immédiatement : $\boxed{J_n+J_{n+1}=u_n}$. En multipliant par $(-1)^n$ on obtient alors : $R_n-R_{n+1}=(-1)^n u_n$, et donc $\boxed{R_n=R_{n+1}+(-1)^n u_n}$.

2) En itérant on a pour tout entier $k\ge 1$: $R_n=R_{n+k}+\sum_{p=n}^{n+k-1}(-1)^p u_p$. Or, $R_n=(-1)^n J_n$ et on a montré que J_n est de limite nulle. Donc $\lim_{k\to\infty} R_{n+k}=0$ et ainsi, en faisant tendre k vers l'infini dans la relation ci-dessus, on obtient : $R_n=\sum_{p=n}^{\infty}(-1)^p u_p=\sum_{p=n}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)^2}$. Donc $\boxed{R_n=\sum_{p=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p^2}}$.

3) Ainsi, $R_{2n+1}=\sum_{k=2n+2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}=\lim_{p\to\infty}\sum_{k=2n+2}^{2n+2p+1}\frac{(-1)^k}{k^2}$. Or $\sum_{k=2n+2}^{2n+2p+1}\frac{(-1)^k}{k^2}=\sum_{k=n}^{n+p-1}\left(\frac{1}{(2k+2)^2}-\frac{1}{(2k+3)^2}\right)$ (on a regroupé les termes 2 par 2). Ainsi, en faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient : $R_{2n+1}=\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{1}{(2k+2)^2}-\frac{1}{(2k+3)^2}\right)$, et finalement : $\boxed{R_{2n+1}=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{4k+5}{(2k+2)^2(2k+3)^2}}$.

4) Pour $k\in\mathbb{N}$, on a : $\frac{4k+5}{(2k+2)^2(2k+3)^2}\le\frac{4k+6}{(2k+2)^2(2k+3)^2}=\frac{2}{(2k+2)^2(2k+3)}\le\frac{2}{(2k+2)^3}$

Et donc : $\frac{4k+5}{(2k+2)^2(2k+3)^2}\le\frac{1}{4(k+1)^3}$. Or la fonction $t\to\frac{1}{4t^3}$ est continue, décroissante, et donc, par comparaison avec une intégrale on a $\frac{1}{4(k+1)^3}\le\int_k^{k+1}\frac{dt}{4t^3}$. Donc :

$$\boxed{\frac{4k+5}{(2k+2)^2(2k+3)^2}\le\int_k^{k+1}\frac{dt}{4t^3}}.$$

Par ailleurs : $\frac{4k+5}{(2k+2)^2(2k+3)^2}\ge\frac{4k+4}{(2k+2)^2(2k+3)^2}=\frac{1}{(k+1)(2k+3)^2}\ge\frac{1}{(k+2)(2k+4)^2}$.

Donc $\frac{4k+5}{(2k+2)^2(2k+3)^2}\ge\frac{1}{4(k+2)^3}$, et le même raisonnement de comparaison avec une intégrale établit :

$$\boxed{\frac{4k+5}{(2k+2)^2(2k+3)^2} \geq \int_{k+2}^{k+3} \frac{dt}{4t^3}}.$$

Cette inégalité n'est pas celle demandée, mais me paraît être la plus cohérente. L'inégalité de l'énoncé peut néanmoins être prouvée : en calculant l'intégrale, il s'agit de prouver que : $\frac{4k+5}{(2k+2)^2(2k+3)^2} \geq \frac{1}{8}\frac{2k+3}{(k+1)^2(k+2)^2}$, ce qui équivaut à $\frac{4k+5}{(2k+3)^2} \geq \frac{1}{2}\frac{2k+3}{(k+2)^2}$, qui équivaut lui-même à $2(k+2)^2(4k+5) \geq (2k+3)^3$, ce qui donne après développement : $6k^2+18k+13 \geq 0$, ce qui est bien réalisé pour tout $k \geq 0$.

5) La fonction $t \to \frac{1}{4t^3}$ étant intégrable sur [1, +∞[, on en déduit en sommant :

$$\int_{n+2}^{\infty} \frac{dt}{4t^3} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{4k+5}{(2k+2)^2(2k+3)^2} \leq \int_{n}^{\infty} \frac{dt}{4t^3}.$$

Et donc :

$$\boxed{\frac{1}{8(n+2)^2} \leq R_{2n+1} \leq \frac{1}{8n^2}}.$$

6) Par suite : $\frac{(2n+1)^2}{8(n+2)^2} \leq (2n+1)^2 R_{2n+1} \leq \frac{(2n+1)^2}{8n^2}$, et les deux termes extrêmes tendent vers $\frac{1}{2}$ quand n tend vers l'infini. Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} (2n+1)^2 R_{2n+1} = \frac{1}{2}}.$$

Or $(2n)^2 R_{2n} = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^2 \left((2n+1)^2 R_{2n+1} - 1\right)$, donc $\boxed{\lim_{n\to\infty} (2n)^2 R_{2n} = -\frac{1}{2}}$.

7) Sachant que $J_n=(-1)^n R_n$, on a alors :

$$\lim_{n\to\infty} (2n+1)^2 J_{2n+1} = -\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} (2n)^2 J_{2n}.$$

Il s'en suit que : $\boxed{\lim_{n\to\infty} n^2 J_n = -\frac{1}{2}}$, et donc $\boxed{J_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}}$.

Partie V

1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. L'application m : $t \to \frac{P(t)\ln(t)}{t+1}$ est continue sur]0, 1], et P est continu, donc borné par une constante K sur le segment [0, 1]. Donc on a sur]0, 1] la majoration : $|m(t)| \leq -K\ln(t)$ ce qui prouve l'intégrabilité de m sur]0, 1]. Donc <u>$T(P)$ est bien défini</u>.

2) T est trivialement linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}$. cqfd.

3) On a alors, pour $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$:

$$\left|T(P)\right| \leq \int_0^1 \frac{\left|P(t)\right|\left|\ln(t)\right| dt}{1+t} \leq \int_0^1 \frac{\left|\ln(t)\right| \sum_{k=0}^{n} \left|a_k\right| t^k dt}{1+t} = -\sum_{k=0}^{n} \left|a_k\right| J_k \leq \left\|P\right\| \sum_{k=0}^{n} \left(-J_k\right).$$

(toutes les intégrales écrites étant bien licites). Finalement, sachant que $-J_k \geq 0$ et que $\sum_{k=0}^{\infty}\left(-J_k\right) = \frac{\pi^2}{8}$ (cf partie III), on a $\sum_{k=0}^{n}\left(-J_k\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty}\left(-J_k\right)$, et donc : $\boxed{\left|T(P)\right| \leq \frac{\pi^2}{8}\left\|P\right\|}$.

4) De la linéarité de T on en déduit, pour P, $Q \in \mathbb{R}[X]$:

$$\left|T(P) - T(Q)\right| = \left|T(P-Q)\right| \leq \frac{\pi^2}{8}\left\|P-Q\right\|,$$

et donc $\boxed{T \text{ est } \frac{\pi^2}{8}\text{-lipschitzienne}}$.

5) Appelons A l'ensemble en question. D'après la question 3, A est majoré par $\frac{\pi^2}{8}$ (et clairement minoré par 0), donc <u>A est borné</u>, et $\mathbf{sup}(A) \leq \frac{\pi^2}{8}$.

Par ailleurs, en considérant le polynôme $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$, on a bien $\left\|P_n\right\| = 1$, et $\left|T(P_n)\right| = \sum_{k=0}^{n}\left(-J_k\right)$, ce qui assure $\sum_{k=0}^{n}\left(-J_k\right) \in A$. Donc $\sum_{k=0}^{n}\left(-J_k\right) \leq \mathbf{sup}(A) \leq \frac{\pi^2}{8}$ et, en faisant tendre n vers l'infini, on obtient $\boxed{\mathbf{sup}(A) = \frac{\pi^2}{8}}$