Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 3 PC

durée 4 heures

L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée

Problème

Le problème comporte trois parties indépendantes, mais on pourra utiliser dans la troisième partie des résultats obtenus dans la première, et admettre l'existence et l'unicité de la fonction φ étudiée dans la partie **2**.

On désigne par n un entier naturel non nul et par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inferieur ou égal à n à coefficients réels.

Le but du problème est l'étude d'une application linéaire et d'une équation différentielle associée à cette application linéaire.

Tournez la page S.V.P.

1 Première partie : étude de l'application

$$\begin{array}{llll} \mathcal{L}_n : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \longmapsto & XP''(X) + (X-4)P'(X) - 3P(X) \end{array}$$

1.1 Propriétés élémentaires de $\mathcal{L}_n$

a) Montrer que $\mathcal{L}_n$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Ecrire la matrice de $\mathcal{L}_n$ dans la base des monômes $(X^k, 0 \leqslant k \leqslant n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) $\mathcal{L}_n$ est-il diagonalisable ?

d) Comparer le degré de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ au degré du polynôme $\mathcal{L}_n(P)$ et en déduire que si un polynôme non nul appartient à Ker $\mathcal{L}_n$ alors il est de degré 3.

e) Montrer que si $n \geq 3$, Ker $\mathcal{L}_n$ est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $X^3 - 6X^2 + 18X - 24$.

f) Montrer que $\mathcal{L}_n$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si $n \leqslant 2$.

1.2 Un exemple : $n = 5$

a) Ecrire la matrice de $\mathcal{L}_5$ dans la base des monômes $(X^k, 0 \leqslant k \leqslant 5)$ de $\mathbb{R}_5[X]$.

b) Déterminer les valeurs propres de $\mathcal{L}_5$. Sans calculs supplémentaires, détermiuer trois sous-espaces propres de $\mathcal{L}_5$.

c) Montrer que les polynômes 1, X, X^2, $X^4 - 4X^3$, X^5 appartiennent à Im $\mathcal{L}_5$ et qu'ils en forment une base.

d) Déterminer, successivement, sans résoudre l'équation différentielle correspondante, l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tels que :

$$\begin{array}{lrcl} (i) & XP''(X) + (X-4)P'(X) - 3P(X) & = & X^5 \\ (ii) & XP''(X) + (X-4)P'(X) - 3P(X) & = & X^4 \end{array}$$

e) En déduire selon les valeurs de l'entier p $(0 \leqslant p \leqslant 5)$ l'existence de polynômes $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tels que :

$$XP''(X) + (X-4)P'(X) - 3P(X) = X^p.$$

2 Deuxième partie : étude locale d'une solution particulière de l'équation différentielle

$$\textbf{(E)} \qquad xy'' + (x-4)y' - 3y = 0$$

2.1 Montrer par récurrence que toute solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.2 Montrer sans calcul l'existence et l'unicité d'une solution φ de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\varphi(1) = 2$ et $\varphi'(1) = -2$ (on ne demande pas d'expliciter φ, ni de résoudre (E)).

2.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \varphi^{(n)}(1)$. En dérivant n fois la relation :
$$x\varphi''(x) + (x-4)\varphi'(x) - 3\varphi(x) = 0,$$
montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+2} + (n-3)(u_{n+1} + u_n) = 0$.

2.4 Justifier que φ admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 1. Montrer que le développement limité à l'ordre 3 de φ au voisinage de 1 est de la forme :
$$\varphi(x) = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$
Déterminer les valeurs de a, b, c, d.

2.5 Soit Γ la courbe représentative de φ dans un repère orthonormé. Déterminer une équation de la tangente à Γ au point de coordonnées $(1, 2)$ et la position relative de la courbe par rapport à cette tangente.

3 Troisième partie : Recherche de solutions de (E) développables en série entière

3.1 Rappeler quelles sont les solutions polynomiales de (E).

3.2 On suppose qu'il existe des solutions non polynomiales développables en série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit

$$f \ : x \mapsto \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

une telle solution définie sur $]-R, +R[$.

a) Montrer que f est solution de (E) sur $]-R, +R[$ si et seulement si :
$$(n+1)(n-4)a_{n+1} + (n-3)a_n = 0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+5} = (-1)^n \frac{n+1}{(n+5)!} 5!\, a_5$.

Donner, dans le cas particulier où $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ et $a_5 = 1$, une solution de (E) développable en série entière. Soit ψ cette solution. Préciser son rayon de convergence.

c) En déduire l'ensemble des solutions de (E) développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

3.3 Montrer que F: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = \alpha(x^3 - 6x^2 + 18x - 24) + \beta\psi(x).$$

3.4 Montrer que G: $\mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ si et seulement si il existe $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad G(x) = \gamma(x^3 - 6x^2 + 18x - 24) + \delta\psi(x).$$

3.5 La fonction φ définie au 2.2 est-elle prolongeable en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ qui soit solution sur $\mathbb{R}$ de (E) ?

3.6 Montrer que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Sont-elles de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$?

3.7 Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(x) = 120(-4 + 3x - x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + (x+4)e^{-x}).$$