

Première partie : étude de l'application :

$$\mathcal{L}_n : P \longmapsto XP''(X) + (X - 4)P'(X) - 3P(X)$$

1.1 Propriétés élémentaires de \mathcal{L}_n

- (a) La dérivation est linéaire et fait chuter le degré d'un polynôme non nul d'une unité, alors grâce aux propriétés des lois + et \times de l'algèbre $\mathbb{R}_n[X]$, on peut dire que \mathcal{L}_n est linéaire et que l'image d'un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme de degré au plus n .

$$\boxed{\mathcal{L}_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])}$$

- (b) Soit k entier entre 0 et n : $\mathcal{L}_n(X^k) = k(k-1)X^{k-1} + k(X-4)X^{k-1} - 3X^k = (k-3)X^k + (k(k-1) - 4k)X^{k-1}$.
 $\mathcal{L}_n(X^k) = (k-3)X^k + (k^2 - 5k)X^{k-1}$. On en déduit la matrice L_n de \mathcal{L}_n dans la base canonique :

$$L_n = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & -6 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & n-2 & n(n-5) \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n-3 \end{bmatrix}$$

- (c) Cette matrice est triangulaire : ses éléments diagonaux sont les valeurs propres de \mathcal{L}_n . Ils sont distincts 2 à 2, donc \mathcal{L}_n a exactement $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ valeurs propres simples :

$$\boxed{\mathcal{L}_n \text{ est diagonalisable}}$$

- (d) Soit P un polynôme non nul de degré p et de coefficient dominant a_p . Le calcul précédent montre que si $p \neq 3$, alors $\mathcal{L}_n(P)$ est aussi de degré p avec pour coefficient dominant $(p-3)a_p$.
 Si $p = 3$, le degré de $\mathcal{L}_n(P)$ est au plus 2..

$$\boxed{P \in \ker(\mathcal{L}_n) \text{ et } P \neq 0 \implies \deg(P) = 3}$$

- (e) Un polynôme non nul de $\ker(\mathcal{L}_n)$ est donc de la forme $P = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ avec $a_3 \neq 0$. Comme $\ker(\mathcal{L}_n)$ est un espace vectoriel, on peut prendre $a_3 = 1$.
 $\mathcal{L}_n(P) = -6X^2 + a_2(-X^2 - 6X) + a_1(-2X - 4) - 3a_0 = -(a_2 + 6)X^2 - (6a_2 + 2a_1)X - 4a_1 - 3a_0$.

$$P \in \ker(\mathcal{L}_n) \iff \begin{cases} a_2 + 6 = 0 \\ 6a_2 + 2a_1 = 0 \\ 4a_1 + 3a_0 = 0 \end{cases}, \text{ système qui se résout en } : a_2 = -6, a_1 = 18, a_0 = -24.$$

Le seul polynôme unitaire de $\ker(\mathcal{L}_n)$ est donc $\Pi = X^3 - 6X^2 + 18X - 24$.

$$\boxed{\ker(\mathcal{L}_n) = \text{Vect}(\Pi)}$$

- (f) Si \mathcal{L}_n est un automorphisme, 0 ne figure pas sur la diagonale de L_n , donc la plus grande valeur propre $n-3$ est inférieure ou égale à -1 , soit $n \leq 3 - 1 = 2$.

Si $n = 1$: $L_1 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ est inversible.

Si $n = 2$: $L_2 = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ est aussi inversible .

$$\boxed{\mathcal{L}_n \text{ inversible} \iff n \leq 2}$$

1.2 Un exemple : n=5

(a) Comme en 1b) $L_5 = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) $Sp(\mathcal{L}_5) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ et chaque sous espace propre est une droite .

Nous connaissons le noyau de \mathcal{L}_5 d'après 1d) et la lecture de la première et de la dernière colonne de la matrice L_5 nous donne deux droites propres :

$$\boxed{\begin{cases} \mathcal{L}_5(X^3 - 6X^2 + 18X - 24) = 0 \\ \mathcal{L}_5(1) = -3 \\ \mathcal{L}_5(X^5) = 2X^5 \end{cases}}$$

(c) La combinaison suivante des deux premières colonnes donne : $\mathcal{L}_5(4 - 3X) = 6X$, donc $X \in \text{Im}(\mathcal{L}_5)$..

On voit aussi que $\mathcal{L}_5(X^3) = -6X^2$ et $\mathcal{L}_5(X^4) = X^4 - 4X^3$.Compte tenu des vecteurs propres associés à une valeur propre non nulle (ils sont dans $\text{Im}(\mathcal{L}_5)$) on a déjà :

$$\text{Vect}(1, X, X^2, X^4 - 4X^3, X^5) \subset \text{Im}(\mathcal{L}_5).$$

Les 5 polynômes générateurs sont de degrés différents 2 à 2 , ils forment donc une famille libre c'est à dire une base de $\text{Vect}(1, X, X^2, X^4 - 4X^3, X^5)$.

Le théorème du rang nous dit que , puisque $\dim(\ker \mathcal{L}_5) = 1$, on a $\dim \text{Im}(\mathcal{L}_5) = 6 - 1 = 5$. L'inclusion des sous espaces est une égalité car ils ont même dimension :

$$\boxed{\text{Vect}(1, X, X^2, X^4 - 4X^3, X^5) = \text{Im}(\mathcal{L}_5)}$$

(d) Les polynômes P solutions de (i) sont ceux qui vérifient $\mathcal{L}_5(P) = X^5$, c'est à dire $\mathcal{L}_5(P - \frac{X^5}{2}) = 0$:

$$\boxed{P = \frac{X^5}{2} + \lambda(X^3 - 6X^2 + 18X - 24) , \lambda \in \mathbb{R}}$$

Démontrons par l'absurde que $X^4 \notin \text{Im}(\mathcal{L}_5)$:

Si il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta) \in \mathbb{R}^6$ tel que

$$\begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \text{ les lignes 4 et 5}$$

sont contradictoires .

$$\boxed{L'équation (ii) n'a pas de solution}$$

(e) D'après 2c) $1, X, X^2, X^5$ sont dans $\text{Im}(\mathcal{L}_5)$, ainsi que $X^4 - 4X^3$. On vient de voir que $X^4 \notin \text{Im}(\mathcal{L}_5)$, alors X^3 n'appartient pas non plus à ce sous espace vectoriel $\text{Im}(\mathcal{L}_5)$:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Pour } p \in \{0, 1, 2, 5\} \text{ l'équation différentielle admet une droite affine de solutions .} \\ \text{Pour } p \in \{3, 4\} , \text{ il n'y a pas de solution .} \end{array}}$$

Deuxième partie : étude locale d'une solution particulière de l'équation différentielle

$$(E) \quad xy'' + (x-4)y' - 3y = 0$$

2.1 Soit ϕ une solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* . Par définition ϕ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \phi''(x) = \frac{4-x}{x}\phi'(x) + 3\phi(x). \quad (1)$$

Démontrons par récurrence sur $n \geq 2$ que ϕ est de classe \mathcal{C}^n sur \mathbb{R}_+^* :

$\forall n \geq 2$, si on suppose ϕ de classe \mathcal{C}^n sur \mathbb{R}_+^* , ϕ' est de classe \mathcal{C}^{n-1} sur \mathbb{R}_+^* et d'après l'égalité (1), ϕ'' est de classe \mathcal{C}^{n-1} sur \mathbb{R}_+^* , c'est à dire ϕ est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur \mathbb{R}_+^* , ce qui prouve l'hérédité de notre propriété.

Toute solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .

2.2 L'équation (E) est linéaire d'ordre 2 et le coefficient de y'' est x , qui ne s'annule pas sur l'intervalle \mathbb{R}_+^* . Comme $x_0 = 1 \in \mathbb{R}_+^*$ le théorème de Cauchy dit qu'il existe une et une seule solution ϕ sur \mathbb{R}_+^* satisfaisant la condition initiale $\phi(x_0) = 2$ et $\phi'(x_0) = -2$.

2.3 La formule de Leibnitz permet de calculer les dérivées nième des produits suivants :

a) $x \mapsto x\phi''(x)$. On obtient : $x \mapsto x\phi^{(n+2)}(x) + n\phi^{(n+1)}(x)$.

b) $x \mapsto (x-4)\phi'(x)$. On obtient : $x \mapsto (x-4)\phi^{(n+1)}(x) + n\phi^{(n)}(x)$.

Comme la fonction $x \mapsto x\phi''(x) + (x-4)\phi'(x) - 3\phi(x)$ est nulle sur \mathbb{R}_+^* , sa dérivée nième aussi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad x\phi^{(n+2)}(x) + n\phi^{(n+1)}(x) + (x-4)\phi^{(n+1)}(x) + n\phi^{(n)}(x) - 3\phi^{(n)}(x) = 0.$$

en particulier au point $x = 1$:

$$u_{n+2} + (n-3)(u_{n+1} + u_n) = 0$$

2.4 D'après 2.1 ϕ est de classe \mathcal{C}^∞ sur l'intervalle \mathbb{R}_+^* qui contient 1. Le théorème de Taylor Young assure l'existence d'un développement limité à tout ordre en $x_0 = 1$. En particulier à l'ordre 3, il s'écrit :

$$\phi(x) = \phi(1) + \phi'(1)(x-1) + \frac{\phi''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{\phi^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

Sachant que $u_0 = 2$ et $u_1 = -2$ la formule établie en 2.3 permet de calculer $u_2 = 0$ et $u_3 = -4$.

$$\phi(x) = 2 - 2(x-1) - \frac{2}{3}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

2.5 On lit sur cette formule que la droite d'équation $y = 2 - 2(x-1)$ est tangente à Γ au point $M_0(1, 2)$ et que ce point est un point d'inflexion parce qu'au voisinage de $x_0 = 1$ le signe de $\phi(x) - (2 - 2(x-1)) = \frac{2}{3}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$ est celui de $x - 1$:

La tangente au point d'inflexion (1, 2) a pour équation $y = 4 - 2x$

Troisième partie : Recherche de solutions de (E) développables en série entière

3.1 Les solutions polynomiales de (E) sont les fonctions polynômes P qui vérifient $\mathcal{L}_n(P) = 0$. D'après 1.1e) il s'agit de :

$$P = \lambda(X^3 - 6X^2 + 18X - 24), \lambda \in \mathbb{R}$$

3.2 Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-R, R[$.

(a) Une série entière se dérive terme à terme sur son intervalle de convergence, alors :

$$\forall x \in]-R, R[. \quad x f''(x) + (x-4)f'(x) - 3f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 4n a_n x^{n-1} - 3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Des séries qui convergent s'ajoutent terme à terme, alors :

$$\forall x \in]-R, R[. \quad x f'''(x) + (x-4)f'(x) - 3f(x) = -3a_0 - 4a_1 + \sum_{p=1}^{\infty} [p(p+1)a_{p+1} + pa_p - 4(p+1)a_{p+1} - 3a_p]x^p$$

Par unicité du développement en série entière, cette fonction est nulle sur $]-R, R[$ si et seulement si on a : $-3a_0 - 4a_1 = 0$ et $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad (p+1)(p-4)a_{p+1} + (p-3)a_p = 0$, ce qu'on peut résumer par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)(n-4)a_{n+1} + (n-3)a_n = 0$$

(b) Si f est solution il faut $a_4 = 0$ et $\forall n \geq 5 \quad a_{n+1} = \frac{-(n-3)}{(n+1)(n-4)}a_n$.

Vérifions par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que la formule $a_{n+5} = (-1)^n \frac{n+1}{(n+5)!} 5! a_5$ est vraie :

Pour $n = 0$ on a bien $(-1)^0 \frac{0+1}{(0+5)!} = \frac{1}{5!}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, si $a_{n+5} = (-1)^n \frac{n+1}{(n+5)!} 5! a_5$, alors la formule de récurrence donne

$$a_{n+6} = \frac{-(n+2)}{(n+6)(n+1)} \times (-1)^n \frac{n+1}{(n+5)!} 5! a_5 = (-1)^{n+1} \frac{n+2}{(n+6)!} 5! a_5, \text{ ce qu'il fallait démontrer.}$$

Réciproquement, considérons la série entière $\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(n+5)!} 5! x^{n+5}$ pour laquelle

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0 \text{ et } a_5 = 1 \text{ et } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n-3)}{(n+1)(n-4)}.$$

D'après le critère de d'Alembert comme $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ son rayon de convergence est infini.

D'après 3.2a) ψ est une solution.

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(n+5)!} 5! x^{n+5}, \quad R = +\infty$$

(c) On a démontré que si f est solution développable en série entière sur $]-R, R[$ elle est de la forme $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_5\psi(x)$. Alors $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ est une solution de (E) puisque combinaison linéaire $P = f - a_5\psi$.

D'après 3.1 : $\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad P(x) = \lambda(x^3 - 6x^2 + 18x - 24)$.

Réciproquement $\forall (\lambda, a_5) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x) = \lambda(-24 + 18x - 6x^2 + x^3) + a_5\psi(x)$ est une fonction développable en série entière avec rayon de convergence $R = +\infty$ et elle est solution de (E) parce que combinaison linéaire de Π et ψ qui sont des solutions de (E).

On a donc trouvé toutes les solutions f développables en série entière. Elles sont de la forme :

$$f = \lambda\Pi + a_5\psi, \quad (\lambda, a_5) \in \mathbb{R}^2$$

3.3 Une conséquence du théorème de Cauchy est que l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle \mathbb{R}_+^* où le coefficient x de y'' ne s'annule pas est un espace vectoriel de dimension 2.

Nous connaissons 2 solutions : les restrictions de Π et ψ à \mathbb{R}_+^* ; l'une est polynomiale, l'autre pas ; elles sont donc linéairement indépendantes et forment une base de l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle \mathbb{R}_+^* . On en déduit la forme de toute solution F :

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad F(x) = \alpha\Pi(x) + \beta\psi(x)$$

3.4 Sur l'intervalle \mathbb{R}_-^* , le coefficient x ne s'annule pas non plus : l'ensemble des solutions de (E) sur \mathbb{R}_-^* est un espace vectoriel de dimension 2.

Les restrictions de Π et ψ à \mathbb{R}_-^* sont des solutions linéairement indépendantes.

On a de même la forme de toute solution G :

$$\exists (\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}_-^* \quad G(x) = \gamma\Pi(x) + \delta\psi(x)$$

3.5 Les coordonnées α et β de la fonction ϕ définie en 2.2 se calculent par $\begin{cases} \alpha\Pi(1) + \beta\psi(1) = 2 \\ \alpha\Pi'(1) + \beta\psi'(1) = -2 \end{cases}$. Ce système est de Cramer parce que son déterminant est le wronskien au point 1 : $W(1) = \begin{vmatrix} \Pi(1) & \psi(1) \\ \Pi'(1) & \psi'(1) \end{vmatrix}$. Cette fonction W ne prend jamais la valeur 0 parce que Π et ψ sont linéairement indépendantes . Notons (α_0, β_0) la solution de ce système de Cramer On peut prolonger ϕ à \mathbb{R} avec :

$$\boxed{f = \alpha_0\Pi + \beta_0\psi \text{ prolonge } \phi \text{ en une fonction de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } f \text{ est solution de (E) sur } \mathbb{R}}$$

3.6 Soit f une solution de (E) sur \mathbb{R} . D'après 3.3 et 3.4 :

$$\exists(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 \quad \begin{cases} \forall x > 0 & f(x) = \alpha\Pi(x) + \beta\psi(x) \\ \forall x < 0 & f(x) = \gamma\Pi(x) + \delta\psi(x) \end{cases}$$

Le raccordement par continuité en $x = 0$ exige : $f(0) = -24\alpha = -24\gamma$, c'est à dire $\alpha = \gamma$.

Le raccordement des dérivées premières et secondes est assuré quand $\alpha = \gamma$ parce que $\psi'(0) = \psi''(0) = 0$, d'où : $f'(0) = \alpha\Pi'(0)$ et $f''(0) = \alpha\Pi''(0)$.

$$\text{Notons } F(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \text{ et } G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ \psi(x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Ce sont des solutions sur \mathbb{R} d'après ce qui précède et nous avons vu que si f une solution de (E) sur \mathbb{R} $\exists(\beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^3$ $f = \beta F + \delta G + \gamma\Pi$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de (E) sur } \mathbb{R} \text{ est l'espace vectoriel de dimension 3 engendré par } (F, G, \Pi)}$$

F et G sont de classe \mathcal{C}^4 sur \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* , mais leur dérivée d'ordre 5 a une discontinuité en 0.

3.7 Calculons le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de $x = 0$ de $f(x) = (x + 4)e^{-x}$:

$$f(x) = (4 + x)\left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right) = 4 - 3x + x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5).$$

Par ailleurs, vérifions que f est une solution de (E) sur \mathbb{R} :

$$f'(x) = (-x - 3)e^{-x} \text{ et } f''(x) = (x + 2)e^{-x}$$

$$xf''(x) + (x - 4)f'(x) - 3f(x) = (x^2 + 2x - x^2 - 3x + 4x + 12 - 3x - 12)e^{-x} = 0.$$

f est développable en série entière, alors d'après 3.2c) :

$\exists(\lambda, a_5) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \lambda(x^3 - 6x^2 + 18x - 24) + a_5\psi(x)$, ce qui nous donne comme développement limité d'ordre 5 au voisinage de 0 :

$f(x) = -24\lambda + 18\lambda x - 6\lambda x^2 + \lambda x^3 + a_5 x^5 + o(x^5)$. L'identification des coefficients permet de calculer

$$\lambda = -\frac{1}{6} \text{ et } a_5 = \frac{1}{120} \text{ et de trouver effectivement :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \psi(x) = 120 \left(f(x) + \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 18x - 24) \right) \text{ soit après simplifications}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(n+5)!} 5! x^{n+5} = 120(-4 + 3x - x^2 + \frac{1}{6}x^3 + (x+4)e^{-x}}$$