CONCOURS ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 2 PC

durée 3 heures

<u>L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée</u>

Exercice 1

Soit a un réel positif ou nul. On considère la suite $\mathbf{u} = (u_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $u_1 = a$ et définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n^2/\sqrt{n}$.

1°. Montrer qu'il existe une unique valeur de a pour laquelle la suite $\mathbf{u}$ est constante. Déterminer cette valeur.

2°. On suppose que la suite $\mathbf{u}$ converge vers une limite finie l. Montrer que $l = 0$.

3°. On suppose que la suite $\mathbf{u}$ vérifie la propriété : $\forall n \geqslant 1, u_n \geqslant \sqrt{n}$. Montrer que $\mathbf{u}$ est une suite croissante qui tend vers $+\infty$.

4°. On suppose que la suite $\mathbf{u}$ vérifie la propriété

$$(\#) \text{: } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_k < \sqrt{k}.$$

(a) Montrer que $u_n < \sqrt{n}, \forall n \geqslant k$.

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant k}$ est décroissante.

(c) Que peut-on en déduire pour la suite $\mathbf{u}$?

5°. Exprimer u_n en fonction de a et de n, pour tout entier naturel n.

6°. Dans cette question, on considère de plus la série de terme général $w_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln(n+1)$.

(a) Montrer que cette série est convergente.

(b) Montrer que la suite $\mathbf{u}$ est convergente si et seulement si il existe un entier $k > 2$ tel que $u_k < 1$.

(c) En déduire que la suite $\mathbf{u}$ est convergente si et seulement si $a < \exp W/2$, où W désigne la somme de la série de terme général w_n.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y).$$

1°. Montrer que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

2°. Déterminez les points $z = (x, y)$ dans le carré $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ tels que $\frac{\partial f}{\partial x}(z) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(z) = 0$.

3°. Montrer que $f(x, y) = 4 \sin\frac{x}{2} \sin\frac{y}{2} \sin\frac{(x+y)}{2}$.

4°. Représenter graphiquement les ensembles

- $S_0 = \{z \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] | f(z) = 0\}$,
- $S_{>0} = \{z \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] | f(z) > 0\}$
- $S_{<0} = \{z \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] | f(z) < 0\}$.

5°. Déterminer les extrema locaux de f sur le carré $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$.

6°. La fonction f admet-elle un maximum sur $\mathbb{R}^2$? La fonction f admet-elle un minimum sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les décrire.

Exercice 3

On considère dans le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ la courbe Γ définie paramétriquement dans le repère orthonormé (O, x, y) par :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3}{t^2+t+1} \\ \\ y(t) = \frac{3t}{t^2+t+1} \end{cases}$$

1°. Etudier les variations de $t \to x(t)$ et $t \to y(t)$.

2°. En déduire que la courbe Γ est contenue dans un carré que l'on déterminera.

3°. Dans cette question, on étudie la courbe Γ au voisinage du point $O = (0, 0)$.

(a). Montrer qu'on peut prolonger par continuité la courbe Γ en ajoutant le point O.

(b). Soit $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t), y(t))$. Calculer les limites du vecteur $t\,\overrightarrow{OM}(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$ et lorsque t tend vers $+\infty$.

(c). Montrer que la droite passant par O de vecteur directeur $t\,\overrightarrow{OM}(t)$ admet une position limite lorsque t tend vers $-\infty$ et lorsque t tend vers $-\infty$; en déduire que la courbe Γ admet une tangente verticale en ce point.

Désormais, on note Γ' la courbe Γ à laquelle on a ajouté le point $O = (0, 0)$.

4°. Etablir une équation cartésienne de Γ'.

5°. En déduire que Γ' est une ellipse.

6°. Montrer que Γ' admet une tangente verticale en un unique point A autre que le point O. Montrer que le milieu du segment $[O, A]$ est le centre G de Γ'.

7°. *Une question indépendante des précédentes.*

(a) Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur une base orthonormée directe. Expliciter ses valeurs propres et une telle base de diagonalisation.

(b) En déduire les axes de Γ'.

(c) Déterminer les sommets de Γ'.

8°. Représenter Γ'.