

MATHÉMATIQUES

Problème

Les trois parties du problème ne sont pas indépendantes.

La fonction f étudiée tout au long du problème est introduite dans la partie II.

On rappelle que $\operatorname{ch} t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ et que $\operatorname{sh} t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ pour tout réel t .

Partie I

1°. Soit k un entier ≥ 1 . Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{e^{-kt}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On note $J_k = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt}}{\sqrt{t}} dt$.

2°. Donner la valeur de J_k (on pourra utiliser l'égalité $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

3°. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t} \operatorname{ch} t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On note $K = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t} \operatorname{ch} t}$.

4°. (a) Montrer que $K = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}(1+e^{-2t})} dt$.

(b) En déduire que $K = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}$.

5°. Montrer que $\frac{1}{2} < K < 1$.

Partie II

Soit n un entier ≥ 1 . Pour tout réel x dans $]0, \pi[$, on pose :

$$u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}, \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) \quad \text{et} \quad A_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin(kx).$$

6°. (a) Pour tout x dans $]0, \pi[$, montrer que $A_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

(b) Si $n \geq 2$, montrer que $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x) \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) + \varepsilon_n(x)$, où $(\varepsilon_n(x))_{n \geq 2}$ est une suite tendant vers 0.

7°. En déduire la convergence de la série de terme général $u_n(x)$.

On note $f(x)$ la somme de la série de terme général $u_n(x)$.

8°. (a) Montrer l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $f_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right) - f_n\left(\frac{\pi}{4n}\right) \geq C\sqrt{n}$.
Expliciter une telle constante.

(b) La suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge-t-elle uniformément sur $]0, \pi[$?

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. Si $z = a + ib$ est un nombre complexe avec a et b réels, on désigne par $\operatorname{Im}(z)$ sa partie imaginaire, c'est-à-dire b .

9°. (a) Soit $x \in]0, \pi[$. Déterminer le tableau de variations de la fonction $t \mapsto |e^{ix-t} - 1|$ définie pour $t \in [0, +\infty[$.

(b) Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}(1 - e^{ix-t})}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

(c) Établir alors que $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} \frac{e^{ix-t} - (e^{ix-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1 - e^{ix-t})} dt$.

(d) En déduire que $f(x) = \frac{\sin x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(\operatorname{ch} t - \cos x)}$.

(e) Montrer que $f(x) > 0$.

(f) En comparant les valeurs de $\operatorname{ch} t$ et e^t sur $]0, +\infty[$, montrer que $\frac{1}{2} < f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 1$.

Partie III

Dans cette partie, $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

10°. (a) Établir que la fonction $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{u}(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 x)}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

(b) Montrer que $f(2x) = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u}(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 x)}$.

11°. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^0 sur $]0, \pi[$.

12°. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, \pi[$.