E3A 2001, troisième épreuve de maths

Partie I

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-kt}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Au voisinage de 0, elle équivaut à $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$, qui est intégrable sur $]0,1]$ et au voisinage de $+\infty$, elle est négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$, qui est intégrable sur $[1,+\infty[$. Donc elle est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2. Le changement de variable $u=\sqrt{kt}$ ($\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0,+\infty[$ sur lui-même) conduit à
$$J_k=\sqrt{\frac{\pi}{k}}$$

3. Analogue au 1. : au voisinage de 0, $\dfrac{1}{\sqrt{t}\,\mathrm{ch}\,t}\sim\dfrac{1}{\sqrt{t}}$, et au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{1}{\sqrt{t}\,\mathrm{ch}\,t}\sim\dfrac{2e^{-t}}{\sqrt{t}}=o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

4. (a) Il suffit de remplacer $\mathrm{ch}\,t$ par sa définition, et de multiplier numérateur et dénominateur par e^{-t}.

   (b) Sur $]0,+\infty[$, $e^{-2t}<1$, donc
$$\frac{1}{1+e^{-2t}}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^k e^{-2kt}$$
Donc
$$K=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right)dt$$
La série fournie par l'énoncé n'étant pas absolument convergente, il n'y a aucune chance de pouvoir appliquer le théorème habituel d'intégration terme à terme sur un intervalle non borné. On écrit, pour $n\in\mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}\sqrt{\pi}K&=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right)dt+\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right)dt\\&=\sum_{k=0}^{n}\int_0^{+\infty}\left((-1)^k\frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right)dt+\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right)dt\end{aligned}$$
puisque la première somme est finie. Il s'agit de montrer que
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right)dt=0$$
Il s'agit du reste d'une série alternée vérifiant le critère spécial, donc
$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}}\right|\leq\frac{e^{-(2n+3)t}}{\sqrt{t}}$$
On peut, ou bien utiliser le thèorème de convergence dominée en majorant encore par $\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$, ou bien écrire :

$$\left| \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}} \right) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{e^{-(2k+1)t}}{\sqrt{t}} \right| dt \leq J_{2n+3} = \sqrt{\frac{\pi}{2n+3}}$$

qui tend bien vers 0 si n tend vers $+\infty$.
En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient bien

$$K = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k J_{2k+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}$$

5. La forme intégrale du 4.(a) montre, en écrivant $0 < e^{-2t} < 1$, que

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{J_1}{2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{2\sqrt{t}} dt < K < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} J_1$$

donc

$$\frac{1}{2} < K < 1$$

On peut aussi utiliser la série alternée, mais c'est plutôt plus lourd.

Partie II

6. (a) Calcul à savoir faire ! On écrit

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right) && \textit{(} x \in]0, \pi[\textit{, donc } e^{ix} \neq 1\textit{)} \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}} \cdot \frac{-2i \sin \frac{(n+1)x}{2}}{-2i \sin \frac{x}{2}} \right) \\ &= \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

On remarque qu'il en résulte $|A_n(x)| \leq \dfrac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} = \dfrac{1}{\sin \frac{x}{2}}$, puisque $\dfrac{x}{2} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

(b) C'est ce qu'on appelle la ¡¡ transformation d'Abel ¿¿. En remarquant que, si $k \geq 2$, $\sin(kx) = A_k(x) - A_{k-1}(x)$, on écrit

$$f_n(x) = A_1(x) + \sum_{k=2}^{n} \frac{A_k(x) - A_{k-1}(x)}{\sqrt{k}}$$

On sépare ensuite la somme en deux, et on fait un changement d'indice dans la deuxième somme. On obtient

$$f_n(x) = A_1(x) + \sum_{k=2}^{n} \frac{A_k(x)}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k(x)}{\sqrt{k+1}}$$

On rassemble à nouveau (le terme où figure $A_n(x)$ reste à part) :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x) \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) + \frac{A_n(x)}{\sqrt{n}}$$

Or $\left| \dfrac{A_n(x)}{\sqrt{n}} \right| \leq \dfrac{1}{\sin \frac{x}{2} \sqrt{n}}$, qui tend bien vers 0 si n tend vers l'infini.

7. D'après la question précédente, il suffit de montrer que la série $\sum A_k(x) \left(\dfrac{1}{\sqrt{k}} - \dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$ converge.
Or :

$$\left| A_k(x) \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$$

et par ¡¡ télescopage ¿¿, la série $\sum \left(\dfrac{1}{\sqrt{k}} - \dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$ converge.

La série $\sum A_k(x) \left(\dfrac{1}{\sqrt{k}} - \dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$ est donc *absolument convergente*, ce qui permet de conclure.

8. (a) On a $f_{2n}\left(\dfrac{\pi}{4n}\right) - f_n\left(\dfrac{\pi}{4n}\right) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin\left(k\frac{\pi}{4n}\right)}{\sqrt{k}}$.

   Si $n \leq k \leq 2n$, alors $\dfrac{\pi}{4} \leq k\dfrac{\pi}{4n} \leq \dfrac{\pi}{2}$, donc $\sin\left(k\dfrac{\pi}{4n}\right) \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. D'autre part, $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$. Donc

$$f_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right) - f_n\left(\frac{\pi}{4n}\right) \geq n \times \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{n}$$

   (b) Si la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ convergeait uniformément sur $]0, \pi[$, alors $(f_{2n} - f_n)$ convergerait uniformément vers 0. Or, en notant $\| \cdot \|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur $]0, \pi[$,

$$\left| f_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right) - f_n\left(\frac{\pi}{4n}\right) \right| \leq \|f_{2n} - f_n\|_\infty$$

   et la question précédente montre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(f_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right) - f_n\left(\frac{\pi}{4n}\right) \right) = +\infty$.
   Donc $\lim \|f_{2n} - f_n\|_\infty = +\infty$, donc la convergence n'est pas uniforme sur $]0, \pi[$.

9. (a) La fonction $g : t \mapsto |e^{ix-t} - 1|$ est continue sur $[0, +\infty[$. Étant positive, elle a les mêmes variations que son carré. Posons $h(t) = |e^{ix-t} - 1|^2$. On trouve sans peine

$$h(t) = e^{-2t} - 2e^{-t}\cos x + 1$$

   h est de classe $\mathcal{C}^1$ et $h'(t) = 2e^{-t}(\cos x - e^{-t})$. Si $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$, alors h' est négative sur $[0, +\infty[$. Si $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, h' s'annule et change de signe pour $t = -\ln\cos x$, valeur qui est bien positive. La valeur de h en ce point est

$$h(-\ln\cos x) = \cos^2 x - 2\cos^2 x + 1 = \sin^2 x$$

   Finalement, le tableau de variations de g est (en remarquant que $\sin x > 0$),

Cas $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$

t	0		$+\infty$
$g(t)$	$\lvert e^{ix}-1\rvert$	$\searrow$	1

Cas $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

t	0		$-\ln\cos x$		$+\infty$
$g(t)$	$\lvert e^{ix}-1\rvert$	$\searrow$	$\sin x$	$\nearrow$	1

(b) Ce qui précède montre que $|e^{-ixt}-1| \geq 1$ si $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$, et que $|e^{-ixt}-1| \geq \sin x > 0$ si $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. En tout cas,

$$\forall t \in [0, +\infty[\quad \left|\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}(1-e^{-ixt})}\right| \leq \frac{Ce^{-t}}{\sqrt{t}}$$

où $C = \dfrac{1}{\sin x}$ ou 1 selon les cas, ne dépend pas de t. L'intégrabilité en résulte sans peine.

(c) La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{ix-t}-(e^{ix-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car

$$\left|\frac{e^{ix-t}-(e^{ix-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})}\right| \leq \frac{2e^{-t}}{\sqrt{t}|1-e^{ix-t}|}$$

qui est intégrable d'après le (b).
On reconnaît dans cette expression la somme partielle d'une série géométrique. Plus précisément,

$$\frac{e^{ix-t}-(e^{ix-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})} = \frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{k=1}^{n}(e^{ix-t})^k$$

Donc (la somme est finie)

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{ix-t}-(e^{ix-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})}\,dt = \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(e^{ix-t})^k}{\sqrt{t}}\,dt = \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} J_k = \sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\sqrt{\frac{\pi}{k}}$$

dont la partie imaginaire est bien $\sqrt{\pi} f_n(x)$.

(d) Quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{e^{ix-t}-(e^{ix-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})}$ tend vers $\dfrac{e^{ix-t}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})}$. Vérifions les hypothèses du théorème de convergence dominée :

$$\forall t \in]0, +\infty[\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left|\frac{e^{ix-t}-(e^{ix-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})}\right| \leq \frac{e^{-t}+e^{-(n+1)t}}{\sqrt{t}|1-e^{ix-t}|} \leq \frac{2e^{-t}}{\sqrt{t}|1-e^{ix-t}|}$$

qui est continue et, d'après (b), intégrable sur $]0,+\infty[$. Le théorème de convergence dominée s'applique donc, et (compte tenu en plus de la continuité de Im),

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{Im}\int_0^{+\infty} \frac{e^{ix-t}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})}dt$$

On peut aussi majorer directement $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(e^{ix-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})}\,dt\right|$ et vérifier que cette expression tend vers 0 si n tend vers $+\infty$.

En multipliant haut et bas par le conjugué $\overline{1-e^{ix-t}}$, on obtient

$$\frac{e^{ix-t}}{\sqrt{t}(1-e^{ix-t})} = \frac{e^{ix-t}(1-e^{-ix-t})}{\sqrt{t}(1+e^{-2t}-2e^{-t}\cos x)} = \frac{(e^{ix-t}-e^{-2t})}{\sqrt{t}(1+e^{-2t}-2e^{-t}\cos x)}$$

dont la partie imaginaire est $\dfrac{e^{-t}\sin x}{\sqrt{t}(1+e^{-2t}-2e^{-t}\cos x)} = \dfrac{\sin x}{2\sqrt{t}(\operatorname{ch} t-\cos x)}$. On a bien le résultat annoncé.

Remarque : pour $x=\dfrac{\pi}{2}$, on retrouve le résultat du 4.(b).

(e) Comme $x\in\,]0,\pi[$, $\sin x>0$, et $\operatorname{ch} t > 1 \geq \cos x$. Il en résulte bien $f(x)>0$.

(f) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}\operatorname{ch} t}$.

On a $\operatorname{ch} t > \dfrac{e^t}{2}$, d'où $f(x) < \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}J_1 = 1$. Par ailleurs, sur $]0,+\infty[$, $\operatorname{ch} t - e^t = -\operatorname{sh} t < 0$, donc $f(x) > \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}J_1 = \dfrac{1}{2}$.

On retrouve le résultat (avec plus ou moins la même méthode !) de la question 5.

Partie III

10. (a) Analogue à la question 3.

(b) On écrit $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}(\operatorname{ch} t-\cos(2x))} = \int_0^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}(\operatorname{ch} t+2\sin^2 x-1)}$. Puis on pose $t=2u$:

$$f(2x) = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{2\,du}{\sqrt{2u}(\operatorname{ch}(2u)-1+2\sin^2 x)}$$

Il faut exprimer $\operatorname{ch} 2u - 1$. La formule n'est pas au programme, mais on la retrouve facilement :

$$\operatorname{ch}(2u)-1 = \frac{e^{2u}+e^{-2u}-2}{2} = \frac{(e^u-e^{-u})^2}{2} = 2\operatorname{sh}^2 u$$

et on obtient bien la formule proposée.

11. $x\mapsto \sin 2x$ est évidemment continue sur $]0,+\infty[$. Par ailleurs, $\operatorname{sh}^2 u+\sin^2 x>0$, donc la fonction $\varphi : (u,x)\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}(\operatorname{sh}^2 u+\sin^2 x)}$ est continue sur $]0,+\infty[\times]0,\pi[$. Soit $a\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. Alors

$$\forall u\in\,]0,+\infty[\quad \forall x\in[a,\pi-a]\quad 0\leq\varphi(u,x)\leq\frac{1}{\sqrt{u}(\operatorname{sh}^2 u+\sin^2 a)}$$

Cette dernière fonction est clairement intégrable sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination locale est donc vérifiée. Il résulte du théorème de continuité sous le signe $\int$ que f est continue sur $]0,+\infty[$.

12. On procède de même, mais on domine en outre la dérivée partielle par rapport à x :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{2\sin x \cos x}{\sqrt{u}(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 x)^2}$$

qu'on domine sur $]0, +\infty[\, \times [a, \pi - a]$ par $\dfrac{1}{\sqrt{u}(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 a)^2}$, fonction intégrable sur $]0, +\infty[$.

On applique le théorème de dérivation sous le signe $\int$ sur un intervalle non compact, et f apparaît alors comme le produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.