22YO

e3a concours

Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 3 PC

durée 4 heures

Problème

L'épreuve est constituée de trois parties, et propose l'étude de quelques propriétés de la fonction J_0 de Bessel (utilisée notamment en physique).

Partie I

Étude de la fonction $J = J_0$ de Bessel. Développement en série entière

1°. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $J(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\big(x.\sin(\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta.$

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$J(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\big(x.\sin(\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\big(x.\sin(\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta.$$

(b) Montrer que la fonction $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ainsi définie est continue, paire et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

(c) Justifier que J est bornée sur $\mathbb{R}$.

(d) Justifier l'encadrement :

$$\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \qquad \frac{2\theta}{\pi} \leqslant \sin(\theta) \leqslant \theta.$$

En déduire un encadrement de $J(x)$ pour $x \in]0, 2]$.

(e) Préciser les valeurs de $J(0)$, $J'(0)$. Montrer que J est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

2°. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

(a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(2n+1)\,I_n = 2(n+1)\,I_{n+1}$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \dfrac{(2n)!\pi}{(n!)^2 2^{2n+1}}$.

3°. **(a)** Rappeler le développement en série entière de la fonction cos et son rayon de convergence. En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $x \mapsto \cos\big(x.\sin(\theta)\big)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et préciser ce développement.

(b) En déduire que J est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad J(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2}\, x^{2n}$$

(on précisera le théorème du cours utilisé pour l'intégration terme à terme).

Les deux parties suivantes sont indépendantes.

Partie II

Étude d'une équation différentielle

4°. Vérifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x\big(J(x) + J''(x)\big) + J'(x) = 0.$$

5°. Montrer que l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, développables en série entière sur $\mathbb{R}$ et solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $xy'' + y' + xy = 0$, est un espace vectoriel réel de dimension 1, engendré par J.

6°. Soit $K \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle : $xy'' + y' + xy = 0$.

Pour tout $x > 0$ on pose : $W(x) = J'(x)K(x) - J(x)K'(x)$.

Montrer que $W \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, et est telle que pour tout $x > 0$, on ait : $W'(x) = -\dfrac{1}{x}\,W(x)$.

En déduire la forme de W.

7°. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\cdot$

(a) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{H_{n+1}}{H_n} \right) = 1.$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} H_n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$.

Vérifier que le rayon de convergence de cette série entière est bien égal à $+\infty$. Pour tout réel x, expliciter (sous forme d'une série entière simple) la valeur de l'expression $x\varphi''(x) + \varphi'(x) + x\varphi(x)$ et la comparer avec $-2\,J'(x)$.

(c) Pour tout $x > 0$, on pose : $K(x) = \ln(x)\,J(x) + \varphi(x)$.

Vérifier que K est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle : $xy'' + y' + xy = 0$, et expliciter la fonction W associée définie au **6**°.

Que peut-on en déduire ?

Partie III

Usage de la transformation de Laplace

8°. **(a)** Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $y > 0$:

$$\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{y^{n+1}}\cdot$$

(b) Montrer que pour tout $y > 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} J(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{y}\,\mathrm{e}^{-1/4y}$$

(on pourra commencer par justifier l'existence de cette intégrale en utilisant par exemple le **1**°. **(c)**, puis le développement en série entière de J vu en **3**°. **(b)** en précisant le théorème du cours utilisé pour l'intégration terme à terme).

9°. **(a)** Justifier pour $y > 0$ l'existence de $L(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} J(x)\,dx$.

(b) Montrer que la fonction L ainsi définie est une application continue sur $]0, +\infty[$ vérifiant $\lim_{y \to +\infty} L(y) = 0$.

10°. **(a)** Déterminer et justifier le développement en série entière sur $]-1,1[$ de la fonction $h : u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$.

(b) Utiliser le développement en série entière de J vu au **3°**. **(b)** afin de montrer que, pour tout $y \in]1,+\infty[$, $\quad L(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$.

11°. Soit $y > 0$ fixé.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $L_n(y) = \displaystyle\int_0^n \mathrm{e}^{-xy} J(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que :

$$|L_n(y) - L(y)| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-ny}}{y}.$$

(b) En remarquant que $\dfrac{\pi}{2} L_n(y) = \Re\mathrm{e}\left(\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^n \mathrm{e}^{x(-y+i\sin(\theta))}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\theta\right)$, montrer que :

$$\frac{\pi}{2} L_n(y) = \Re\mathrm{e}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^{n(-y+i\sin(\theta))}}{-y+\mathrm{i}\,\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{y-\mathrm{i}\,\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta\right).$$

(c) Montrer que :

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^{n(-y+i\sin(\theta))}}{-y+\mathrm{i}\,\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{e}^{-ny}}{y}.$$

(d) Par un passage à la limite, en déduire que, pour tout $y > 0$, on a :

$$L(y) = \frac{2y}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{y^2+\sin^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

(on pourra utiliser le changement de variable défini par "$u = \tan(\theta)$").