Concours E3A 2000. Mathématiques 3, filière PC.

Problème

Partie I

1°.(a) La fonction $h:\ \theta \mapsto \cos(x\sin(\theta))$ est paire de période π ; par suite

$$\int_0^{2\pi} h(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi} h(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} h(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 4\int_0^{\pi/2} h(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

(b) Soit $f(x,\theta)=\cos(x\sin(\theta))$; alors $J(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x,\theta)\,\mathrm{d}\theta$. f, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$ donc d'après les théorèmes concernant les intégrales dépendant d'un paramètre, J est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et l'on peut obtenir J' et J'' en dérivant sous l'intégrale.
Comme $f(-x,\theta)=f(x,\theta)$, J est paire.

(c) $|J(x)| \le \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} |\cos(x\sin(\theta))|\,\mathrm{d}\theta \le \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta = 1$ donc J est bornée sur $\mathbb{R}$.

(d) La restriction de la fonction sin à $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ est concave puisque $(\sin(\theta))''=-\sin(\theta)<0$.
La courbe est donc d'une part au-dessous de sa tangente en $\theta=0 : \sin(\theta)\le\theta$ et d'autre part au-dessus de la corde $[OA]$ où A est le point de coordonnées $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right) : \sin(\theta)\ge\dfrac{2}{\pi}\theta$.
Finalement, $\forall\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2}{\pi}\theta\le\sin(\theta)\le\theta$.
Pour $x\in]0,2]$ et $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $0\le\dfrac{2x\theta}{\pi}\le x\sin(\theta)\le x\theta\le\pi$. Comme la fonction cos est décroissante sur $[0,\pi]$, on en déduit que $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos(x\theta)\,\mathrm{d}\theta \le J(x) \le \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos(\dfrac{2x\theta}{\pi})\,\mathrm{d}\theta$.
Finalement, $\forall x\in]0,2]$, $\dfrac{\sin(x\pi/2)}{x\pi/2}\le J(x)\le\dfrac{\sin x}{x}$.

(e) $J(0)=1$.
D'après (b), $J'(x)=-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(\theta)\sin(x\sin(\theta))\,\mathrm{d}\theta$, donc $J'(0)=0$.
De plus, $\forall\theta\in[0,\pi]$, $\sin(\theta)\ge 0$, donc $\forall x\in[0,\pi]$, $0\le x\sin(\theta)\le\pi$ d'où $\sin(x\sin(\theta))\ge 0$ et $J'(x)\le 0$.
Finalement, J est décroissante sur $[0,\pi]$.

2°.(a) En intégrant par parties, pour $n\in\mathbb{N}$, on trouve que
$I_{n+1}=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin(\theta)\sin^{2n+1}(\theta)\,\mathrm{d}\theta=\left[-\cos(\theta)\sin^{2n+1}(\theta)\right]_0^{\pi/2}+(2n+1)\int_0^{\pi/2}\cos^2(\theta)\sin^{2n}(\theta)\,\mathrm{d}\theta=$
$(2n+1)(I_n-I_{n+1})$.
On en déduit que $\forall n\in\mathbb{N}$, $(2n+1)I_n=2(n+1)I_{n+1}$.

(b) On raisonne par récurrence. $I_0=\dfrac{\pi}{2}$ donc la formule proposée est vraie pour $n=0$ et si l'on suppose qu'elle est vraie pour $n\in\mathbb{N}$ alors $I_{n+1}=\dfrac{(2n+1)(2n)!\pi}{2(n+1)(n!)^2 2^{2n+1}}=\dfrac{(2n+2)!\pi}{((n+1)!)^2 2^{2n+3}}$ donc elle est vraie aussi pour $n+1$ ce qui termine la démonstration par récurrence.

3°.(a) La fonction cos est développable en série entière en 0 avec un rayon de convergence infini :
$\forall t\in\mathbb{R}$, $\cos t=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}$.

Par conséquent, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto \cos(x\sin(\theta))$ est également développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x\sin(\theta)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{\sin^{2n}(\theta)}{(2n)!}x^{2n}\cdot$

(b) Soit $u_n(\theta) = (-1)^n \dfrac{\sin^{2n}(\theta)}{(2n)!}x^{2n}$; pour $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $N_\infty(u_n) = \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\cdot$ Or c'est le terme général d'une série convergente puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\cdot$ Il y a donc convergence normale de $\sum u_n(\theta)$ pour $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On peut ainsi intégrer terme à terme et l'on obtient :

$\forall x \in \mathbb{R},\ J(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n I_n x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}x^{2n}.$

Partie II

4°. D'après I1.(b), $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$x(J(x)+J''(x)) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x(1-\sin^2(\theta))\cos(x\sin(\theta))\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos(\theta)\cos(x\sin(\theta))\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\sin(x\sin(\theta))\cos(\theta)\right]_0^\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\sin(\theta))(-\sin(\theta))\,\mathrm{d}\theta = -J'(x).$$

On a donc bien $\forall x \in \mathbb{R}$, $x(J(x)+J''(x)) + J'(x) = 0$.

5°. Supposons que $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soit une série entière de rayon $R > 0$. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < R$,

$0 = xy'' + y' + xy = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n x^{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^{n-1} =$

$a_1 + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(n^2 a_n + a_{n-2})x^{n-1}.$

On en déduit par unicité du développement en série entière que $a_1 = 0$ puis que $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et que $a_{2p} = -\dfrac{1}{4p^2}a_{2p-2} = \ldots = \dfrac{(-1)^p}{4^p(p!)^2}a_0$ c'est-à-dire que $y(x) = a_0 J(x)$ ce qui montre le résultat cherché.

6°. $W \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ car J et $K \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

$\forall x > 0,\ W'(x) = J''(x)K(x) - J(x)K''(x) = \left[-\dfrac{J'(x)}{x} - J(x)\right]K(x) - \left[-\dfrac{K'(x)}{x} - K(x)\right]J(x) =$

$-\dfrac{1}{x}\left[J'(x)K(x) - J(x)K'(x)\right] = -\dfrac{1}{x}W(x).$

De $xW'(x) + W(x) = 0$, on déduit $[xW(x)]' = 0$ et $\exists\lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x > 0,\ W(x) = \dfrac{\lambda}{x}\cdot$

7°.(a) $\dfrac{H_{n+1}}{H_n} = 1 + \dfrac{1}{(n+1)H_n} = 1 + O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ puisque $H_n \geq 1$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{H_{n+1}}{H_n} = 1$.

(b) Soit $b_n = \dfrac{(-1)^{n+1}H_n}{4^n(n!)^2}\cdot$ Alors $\dfrac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \dfrac{1}{4(n+1)^2}\dfrac{H_{n+1}}{H_n}$ a pour limite 0 donc, d'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\varphi(x)$ est bien égal à $+\infty$.

Le calcul fait au 5° donne (puisque l'on a ici $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = b_p$)

$x\varphi''(x) + \varphi'(x) + x\varphi(x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}(4p^2 b_p + b_{p-1})x^{2p-1}.$

Or $4p^2 b_p + b_{p-1} = \dfrac{(-1)^{p+1}H_p}{4^{p-1}((p-1)!)^2} + \dfrac{(-1)^p H_{p-1}}{4^{p-1}((p-1)!)^2} = \dfrac{(-1)^{p+1}}{4^{p-1}p!(p-1)!}$ puisque $H_p - H_{p-1} = \dfrac{1}{p}\cdot$

On obtient ainsi $x\varphi''(x) + \varphi'(x) + x\varphi(x) = -2J'(x)$.

(c) $x[\ln(x)J(x)]'' + [\ln(x)J(x)]' + x\ln(x)J(x) =$

$x\left[-\dfrac{1}{x^2}J(x) + \dfrac{2}{x}J'(x) + \ln(x)J''(x)\right] + \dfrac{1}{x}J(x) + \ln(x)J'(x) + x\ln(x)J(x) =$

$[xJ''(x) + J'(x) + xJ(x)]\ln(x) + 2J'(x) = 2J'(x) = -x\varphi''(x) - \varphi'(x) - x\varphi(x)$

d'où $xK''(x) + K'(x) + xK(x) = 0$.

D'après 6°, on a $W(x) = \dfrac{\lambda}{x}$ d'où $\lambda = xK(x)J'(x) - xK'(x)J(x)$

$\lambda = x\ln(x)J(x)J'(x) + x\varphi(x)J'(x) - xJ(x)\left[\dfrac{1}{x}J(x) + \ln(x)J'(x) + \varphi'(x)\right]$

$\lambda = -J(x)^2 + x[\varphi(x)J'(x) - \varphi'(x)J(x)]$

Puisque J et φ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, en faisant tendre x vers 0, on obtient que $\lambda = -J(0)^2 = -1$.

Donc $W(x) = -\dfrac{1}{x}$ ne s'annule pas. Comme c'est le Wronskien associé aux solutions J et K, on peut en déduire que (J, K) est une base de l'ensemble des solutions de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie III

8°.(a) Comme $y > 0$, toutes les fonctions considérées sont intégrables sur $[0, +\infty[$.

On raisonne par récurrence. Pour $n = 0$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-xy}}{y}\right]_{x=0}^{x\to+\infty} = \frac{1}{y}$

et pour $n \geq 1$, on suppose le résultat vrai pour $n-1$ et on intègre par parties :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x = \left[x^n \frac{-\mathrm{e}^{-xy}}{y}\right]_{x=0}^{x\to+\infty} + \frac{n}{y}\int_0^{+\infty} x^{n-1}\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x = \frac{n}{y}\frac{(n-1)!}{y^n} = \frac{n!}{y^{n+1}}\cdot$

(b) D'après 1°.(*c*), $0 \leq \mathrm{e}^{-xy}|J(\sqrt{x})| \leq \mathrm{e}^{-xy}$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale considérée existe.

D'après 3°.(*b*), $J(\sqrt{x}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}x^n$ d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy}J(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}x^n\,\mathrm{d}x$.

On pose donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n(x) = \mathrm{e}^{-xy}\dfrac{(-1)^n x^n}{4^n(n!)^2}\cdot$

Alors, d'après la question précédente, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4^n(n!)^2}\frac{n!}{y^{n+1}} = \frac{1}{y}\frac{1}{n!}\frac{1}{(4y)^n}\cdot$

Puisque la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} |u_n(x)| = \frac{1}{y}\mathrm{e}^{1/(4y)}$ converge, on peut intervertir l'intégrale et la série pour obtenir l'égalité demandée.

9°.(a) $|\mathrm{e}^{-xy}J(x)| \leq \mathrm{e}^{-xy}$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $y > 0$ donc $\mathrm{e}^{-xy}J(x)$ l'est aussi et $L(y)$ existe.

(b) $\forall a > 0,\ \forall b > a,\ \forall y \in [a, b],\ |\mathrm{e}^{-xy}J(x)| \leq \mathrm{e}^{-ax}$ qui est indépendante de y et intégrable sur $[0, +\infty[$.

De plus, $(x, y) \mapsto \mathrm{e}^{-xy}J(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

On peut donc appliquer le théorème sur les intégrales généralisées dépendant d'un paramètre (avec hypothèse de domination sur tout segment) qui permet d'affirmer que L est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Enfin, $|L(y)| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{y}$, donc $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} L(y) = 0$.

10°.(a) $h(u) = (1+u^2)^{-1/2}$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$ comme $(1+x)^a$.

$$h(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2n-1}{2})}{n!}u^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2}u^{2n}.$$

(b) Le calcul du 8°.(b) peut être repris en changeant x^n en x^{2n}, d'où
$L(y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{1}{y^{2n+1}} = \frac{1}{y} h\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y\sqrt{1+(1/y^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ car $\displaystyle\frac{1}{y} \in]0,1[$ puisque $y \in]1,+\infty[$.

11°.(a) $|L_n(y) - L(y)| = \left|\displaystyle\int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} J(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \displaystyle\int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{-xy}}{-y}\right]_{x=n}^{x\to+\infty} = \frac{\mathrm{e}^{-ny}}{y}\cdot$

(b) $\displaystyle\frac{\pi}{2} L_n(y) = \frac{\pi}{2} \int_0^n \mathrm{e}^{-xy} J(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^n \mathrm{e}^{-xy} \left(\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin(\theta))\,\mathrm{d}\theta\right) \mathrm{d}x =$
$\displaystyle\Re e\left(\int_0^n \mathrm{e}^{-xy} \left(\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{ix\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta\right) \mathrm{d}x\right)$.
Or $(x,\theta) \mapsto \mathrm{e}^{-xy+ix\sin\theta}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc on peut appliquer le théorème de Fubini et intervertir les intégrales :
$\displaystyle\frac{\pi}{2} L_n(y) = \Re e\left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^n \mathrm{e}^{x(-y+i\sin(\theta))}\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}\theta\right) = \Re e\left(\int_0^{\pi/2} \left[\frac{\mathrm{e}^{x(-y+i\sin(\theta))}}{-y+i\sin(\theta)}\right]_{x=0}^{x=n} \mathrm{d}\theta\right) =$
$\displaystyle\Re e\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{e}^{n(-y+i\sin(\theta))}}{-y+i\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{y-i\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta\right)$
car on peut couper l'intégrande en deux puisqu'il s'agit de fonctions continues que l'on intègre sur un segment.

(c) $\displaystyle\left|\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{e}^{n(-y+i\sin(\theta))}}{-y+i\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta\right| \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{e}^{-ny}|\mathrm{e}^{in\sin(\theta)}|}{|-y+i\sin(\theta)|}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{e}^{-ny}}{\sqrt{y^2+\sin^2(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{e}^{-ny}}{y}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{e}^{-ny}}{y}\cdot$

(d) D'après 11°.(a), $L(y) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} L_n(y)$. Donc d'après 11°.($c$), $L(y) = \displaystyle\frac{2}{\pi}\Re e\left(\int_0^{\pi/2} \frac{1}{y-i\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta\right)$.
$L(y) = \displaystyle\frac{2y}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{y^2+\sin^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \frac{2y}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\left(\frac{y^2}{\cos^2(\theta)} + \tan^2(\theta)\right)\cos^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$. On pose alors $u = \tan(\theta)$ d'où
$L(y) = \displaystyle\frac{2y}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{y^2(1+u^2)+u^2} = \frac{2y}{\pi}\frac{1}{y^2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+\left(\frac{1+y^2}{y^2}\right)u^2} = \frac{2}{\pi y}\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\left[\arctan\frac{u\sqrt{1+y^2}}{y}\right]_{u=0}^{u\to+\infty} =$
$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\cdot$

*** FIN ***