22PU

CONCOURS ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 2 PC

durée 3 heures

Exercice 1

Pour tous réel $x > 0$ et entier $n \geqslant 3$, on pose : $f_n(x) = x - n.\ln(x)$, où le symbole $\ln$ désigne le logarithme népérien.

1°. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle ouvert $]0, 2[$. On appellera désormais a_n cette solution.

2°. Montrer que la suite (a_n) est strictement décroissante [on pourra comparer $f_n(a_n)$ et $f_n(a_{n-1})$].

3°. Montrer que cette suite (a_n) tend vers 1.

4°. Soit Φ la fonction telle que $\Phi(t) = \dfrac{\ln(1+t)}{1+t}$, avec t réel strictement supérieur à -1. Démontrer que Φ admet, en $t = 0$, un développement limité à tout ordre k, soit $\Phi(t) = \sum_{j=1}^{k} b_j t^j + \mathrm{o}(t^k)$.

5°. Étudier la nature de la suite $|b_j|$.

6°. Montrer que, sur l'intervalle $]-1, \mathrm{e}-1[$, la fonction Φ admet une fonction réciproque Ψ dont on donnera le tableau de variations.

7°. Montrer que Ψ admet, en $u = 0$, un développement limité à tout ordre k, soit $t = \Psi(u) = \sum_{j=1}^{k} c_j u^j + o(u^k)$.

8°. Donner pour a_n un développement limité d'ordre 2 vis-à-vis de l'infiniment petit $\frac{1}{n}$, soit $a_n = A + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, où l'on précisera les constantes A, B et C.

9°. Prouver que les coefficients c_j sont tous strictement positifs [on pourra utiliser une équation différentielle du premier ordre reliant $\Psi(u)$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\Psi(u)$ afin d'exprimer c_k en fonction des c_j d'indices $j < k$].

Exercice 2

Pour tout x réel dans l'intervalle ouvert $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on pose : $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$. La dérivée d'ordre n de f en x est ici notée $f^{(n)}(x)$, avec la convention $f^{(0)}(x) = f(x)$.

1°. **(a)** Prouver l'existence et l'unicité d'un polynôme P_n tel que : $f^{(n)}(x) = \frac{P_n\big(\sin(x)\big)}{\big(\cos(x)\big)^{n+1}}$.

(b) Donner une relation entre P_{n+1}, P_n et P'_n.

(c) Préciser P_0, P_1 et P_2.

(d) Déterminer le monôme de plus haut degré de P_n.

(e) Examiner la parité du polynôme P_n.

2°. **(a)** Montrer que les coefficients du polynôme P_n sont des entiers positifs ou nuls.

(b) Que vaut $P_n(1)$?

3°. On pose $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$. Pour tout $x \in I$, justifier la formule :

$$f(x) = S_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 u^n \, f^{(n+1)}\big(x\,(1-u)\big)\,\mathrm{d}u.$$

4°. Prouver que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$.

5°. **(a)** Pour tous $0 \leqslant x < y < \frac{\pi}{2}$, prouver que : $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y)$.

(b) Prouver également que : $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$.

6°. En déduire que, pour tout $x \in I$, on a : $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} x^{2k}$.

7°. **(a)** Démontrer que la suite (a_{2k}) tend vers 0.

(b) Pour tout $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, montrer l'existence d'une constante $M_\varepsilon > 0$ telle que :

$$0 \leqslant a_{2k} \leqslant M_\varepsilon \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)^{-2k}.$$

(c) Montrer que la suite $(a_{2k} 2^k)$ est bornée.

(d) On donne la formule suivante : $a_{2k} = \frac{2^{2k+2}}{\pi^{2k+1}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}}$. Démontrer les relations $\frac{1}{3^k} \leqslant a_{2k} \leqslant \frac{1}{2^k}$ [on pourra éventuellement s'aider d'une calculatrice].

Exercice 3

On note $R[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, et $R_k[X]$ le sous-ensemble de $R[X]$ constitué des polynômes nuls ou dont le degré est inférieur ou égal à k. Le coefficient binômial $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ sera noté $\binom{n}{k}$, ou bien C_n^k, au choix. On suppose n entier supérieur ou égal à 1 dans toute la suite.

1°. **(a)** Montrer l'existence de polynômes f_n et g_n dans $R_{n-1}[X]$, tels que :

$$(1-X)^n f_n(X) + X^n g_n(X) = 1,$$

ceci par développement de $\left((1-X)+X\right)^{2n-1}$, ou autrement [NB : on ne demande pas de calculer leurs coefficients].

(b) Préciser les polynômes f_1, f_2 et f_3.

2°. Déterminer en fonction de f_n et de g_n tous les couples (A, B) de polynômes de $R[X]$ tels que $(1-X)^n A(X) + X^n B(X) = 1$. Démontrer l'unicité de f_n et de g_n.

3°. **(a)** Montrer que $f_n(1-X) = g_n(X)$.

(b) Calculer $f_n(0)$, $f_n(1)$ et $f_n\left(\frac{1}{2}\right)$.

4°. **(a)** Dans tout ce qui suit, x désigne une variable réelle. Pour x tendant vers 0, démontrer la formule asymptotique suivante : $f_n(x) = (1-x)^{-n} + \mathrm{o}(x^{n-1})$.

(b) En déduire les coefficients du polynôme f_n.

(c) L'équation $f_n(x) = 0$ peut-elle avoir une racine positive ou nulle ?

5°. **(a)** Établir, pour tout x réel, la relation $n\, f_n(x) - (1-x)\, f_n'(x) = n \binom{2n-1}{n} x^{n-1}$.

(b) En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ ne peut pas avoir deux racines réelles strictement négatives.

6°. Pour tout x réel, on pose : $h_n(x) = \displaystyle\int_0^x t^{n-1}(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$. Suivant la parité de n, donner le tableau des variations de la fonction h_n.

7°. **(a)** Démontrer que, pour tout $x \neq 1$, on a : $f_n(x) = \dfrac{1 - n\binom{2n-1}{n} h_n(x)}{(1-x)^n}$.

(b) Ce résultat est-il en accord avec la valeur de $f_n(1)$ trouvée plus haut ?

8°. Discuter selon n le nombre de racines de l'équation $f_n(x) = 0$ sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.

9°. Prouver que les racines de $f_n(z) = 0$, $z \in \mathbb{C}$, sont de modules strictement inférieurs à 1.