$\boxed{\text{e3a} \quad \text{PC} \quad \text{Mathématiques 2}}$

Exercice 1

1) $\forall x > 0$, $f'_n(x) = 1 - \dfrac{n}{x}$

Comme $n \geq 3$, sur l'intervalle $]0,2[$ la fonction f_n est strictement décroissante et continue, $\lim\limits_{0^+} f_n = +\infty$. La restriction de f_n à $]0,2[$ est une bijection de $]0,2[$ sur $]2 - n\ln(2), +\infty[$

$n \geq 3$ donc $2 - n\ln(2) \leq 2 - 3\ln(2) < 0$, donc $0 \in]2 - n\ln(2), +\infty[$

f_n s'annule donc une fois et une seule sur $]0,2[$ en a_n

Comme $f_n(1) = 1 > 0$, $a_n \in]1,2[$ pour tout $n \geq 3$

2) Pour $n \geq 4$, $x \geq 0$, $f_n(x) - f_{n-1}(x) = -\ln(x)$

donc $f_n(a_{n-1}) - f_{n-1}(a_{n-1}) = -\ln(a_{n-1})$, $f_{n-1}(a_{n-1}) = f_n(a_n) = 0$

donc $f_n(a_{n-1}) - f_n(a_n) = -\ln(a_{n-1}) < 0$ puisque $a_{n-1} \in]1,2[$

f_n étant strictement décroissante sur $]1,2[$, la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est strictement décroissante

3) La suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante et minorée par 1, donc elle converge vers $l \geq 1$

si $l > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(a_n) = +\infty$ comme $a_n = n\ln(a_n)$ on a une impossibilité

donc la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ converge vers 1

4) La fonction $\Phi : t \to \dfrac{\ln(1+t)}{1+t}$ est de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$ intervalle ouvert contenant 0, d'après le théorème de Taylor-Young, elle admet un développement limité à tout ordre k en 0

5) La partie régulière du développement limité d'ordre k en 0 est la somme partielle de rang k du développement en série entière de Φ en 0

Φ est le produit de deux fonctions développables en série entière en 0

$\forall t$, $|t| < 1$, $\ln(1+t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} t^i$, $\dfrac{1}{1+t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^i t^i$

donc $\forall t$, $|t| < 1$, $\Phi(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} b_j t^j$ avec $b_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{j} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (-1)^{j-k} = \boxed{(-1)^{j-1} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k}}$

en particulier $\Phi'(0) = 1$, $\Phi''(0) = -2(1 + \dfrac{1}{2}) = -3$

donc $|b_j| = \displaystyle\sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k}$, la série de terme général $\dfrac{1}{k}$ est à termes positifs et elle diverge donc $\boxed{\lim\limits_{j\to+\infty} |b_j| = +\infty}$

6) $\forall t \in]-1,+\infty[$, $\Phi'(t) = \dfrac{1 - \ln(1+t)}{(1+t)^2}$ donc $\forall t \in]-1, e-1[$, $\Phi'(t) > 0$

$\lim\limits_{-1} \Phi = -\infty$, $\Phi(e-1) = \dfrac{1}{e}$

La restriction de Φ à $]-1, e-1[$ est strictement croissante et continue, elle réalise une bijection de $]-1, e-1[$ sur $]-\infty, \dfrac{1}{e}[$, elle admet donc une application réciproque Ψ définie et continue sur $]-\infty, \dfrac{1}{e}[$ strictement croissante

t	-1	0	$+\infty$
Ψ	$-\infty \nearrow$	$0 \nearrow$	$e-1$

7) La restriction de Φ à $]-1, e-1[$ est de classe C^∞ sur $]-1, e-1[$, Φ' ne s'annule pas sur $]-1, e-1[$ donc Φ est un C^∞-difféomorphisme de $]-1, e-1[$ sur $]-\infty, \dfrac{1}{e}[$ donc Ψ est de classe C^∞ sur $]-\infty, \dfrac{1}{e}[$ intervalle ouvert contenant 0 donc

Ψ admet un développement limité à tout ordre k en 0, $\Psi(0) = 0$

donc $\Psi(u) \underset{u\to 0}{=} \displaystyle\sum_{j=1}^{k} c_j u^j + o\left(u^k\right)$

8) Posons $b_n = a_n - 1$, comme $1 < a_n < 2$, $b_n \in]-1, e-1[$

De plus $\dfrac{\ln(1+b_n)}{1+b_n} = \Phi(b_n) = \dfrac{1}{n}$ donc $b_n = \Psi\left(\dfrac{1}{n}\right)$

$c_1 = \Psi'(0) = \dfrac{1}{\Phi'(0)} = 1$, $c_2 = \dfrac{1}{2}\Psi''(0) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\Phi''(0)\Psi'(0)}{(\Psi'(0))^2} = \dfrac{3}{2}$

donc $\boxed{a_n \underset{n\to\infty}{=} 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}$

9) $\forall u\in]-\infty,\frac{1}{e}[\ ,\ \Phi\left(\Psi\left(u\right)\right)=u=\dfrac{\ln(1+\Psi(u))}{1+\Psi(u)}$
donc en dérivant $\left(1+\Psi(u)\right)\left(1+\Psi(u)+u\Psi'(u)\right)=\Psi'(u)$
Ψ,Ψ' sont de classe C^{∞}au voisinage de 0, elles admettent des développements limités à tout ordre en 0
$\Psi(u)\underset{u\to 0}{=}\sum_{j=1}^{k-1}c_ju^j+o\left(u^k\right)\ ;\ \Psi'(u)\underset{u\to 0}{=}\sum_{j=1}^{k}jc_ju^{j-1}+o\left(u^k\right)$

Le développement limité d'ordre k d'un produit s'obtient en tronquant le produit des parties régulières d'ordre k de chaque terme
$1+\Psi(u)+u\Psi'(u)=1+\sum_{j=1}^{k-1}(1+j)c_ju^j+o(u^{k-1})$
le coefficient de u^{k-1} du développement limité de $\left(1+\Psi(u)\right)\left(1+\Psi(u)+u\Psi'(u)\right)$ est :
$kc_{k-1}+\sum_{j=1}^{k-2}c_j\left(k-j\right)c_{k-1-j}+c_{k-1}$ si $k\geq 3$, $3c_1$ si $k=2$
le développement limité étant unique, on obtient :
$\boxed{c_1=1\ ;\ c_2=\frac{3}{2}c_1 \text{ et si } k\geq 3\ ,\ kc_k=kc_{k-1}+\sum_{j=1}^{k-2}c_j\left(k-j\right)c_{k-1-j}+c_{k-1}}$
Montrons par récurrence que tous les c_j sont strictement positifs pour $j\geq 1$
- $c_1=1$
- supposons que pour $0<j<n$, $c_j>0$ la relation précédente permet alors d'affirmer que $c_n>0$

Exercice 2

f est C^{∞} sur I
1) a) $f^{(0)}(x)=\dfrac{1}{\left(\cos x\right)^{0+1}}=\dfrac{P_0(\sin x)}{\left(\cos x\right)^{0+1}}$ avec $P_0=1$
Supposons que $f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(\sin x)}{\left(\cos x\right)^{n+1}}$ avec P_n polynôme. En dérivant on obtient
$f^{(n+1)}(x)=\dfrac{\left(\cos x\right)^2P_n'(\sin x)+(n+1)\sin xP_n(\sin x)}{\left(\cos x\right)^{n+2}}=\dfrac{\left(1-\sin^2x\right)P_n'(\sin x)+(n+1)\sin xP_n(\sin x)}{\left(\cos x\right)^{n+2}}=\dfrac{P_{n+1}(\sin x)}{\left(\cos x\right)^{n+2}}$
avec $P_{n+1}=\left(1-X^2\right)P_n'+(n+1)XP_n$
P_{n+1} est un polynôme comme produit et somme de polynômes. D'où l'existence de P_n
Supposons que $\forall x\in I\ ,\ f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(\sin x)}{\left(\cos x\right)^{n+1}}=\dfrac{Q_n(\sin x)}{\left(\cos x\right)^{n+1}}$
on a alors $\forall x\in I\ ,\ P_n(\sin x)=Q_n(\sin x)$ soit $\forall x\in]-1,1[\ ,\ \left(P_n-Q_n\right)(x)=0$
P_n-Q_n est un polynôme qui a une infinité de racines, donc $P_n-Q_n=0$
donc $\boxed{\text{il existe un polynôme } P_n \text{ et un seul tel que } f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(\sin x)}{\left(\cos x\right)^{n+1}}}$
b) $\boxed{P_{n+1}=\left(1-X^2\right)P_n'+(n+1)XP_n}$
c) $\boxed{P_0=1\ ,\ P_1=X\ \ ,\ P_2=1+X^2}$
d) On montre par récurrence que le monôme de plus haut degré de P_n est : X^n
e) $f^{(n)}$ a la parité de n, la fonction cosinus est paire, la fonction sinus est impaire donc
$\forall x\in I\ ,\ P_n(-\sin x)=(-1)^nP_n(\sin x)$ soit $\forall x\in]-1,1[\ ,\ P_n(-x)=(-1)^nP_n(x)$
donc le polynôme $P_n(-X)-(-1)^nP_n(X)$ est nul $\boxed{P_n \text{ a la parité de } n}$
(on peut aussi montrer la propriété par récurrence)
2) a) $P_0=1$ donc les coefficients de P_0 sont des entiers positifs
Supposons que les coefficients de P_n soient entiers positifs, P_n a la parité de n donc posons
$P_n=\sum_{k=0}^{[n/2]}a_{n-2k}X^{n-2k}$
$P_{n+1}=\left(1-X^2\right)P_n'+(n+1)XP_n=P_n'+\left[(n+1)XP_n-X^2P_n'\right]$
soit $P_{n+1}=\sum_{k=0}^{[n/2]}a_{n-2k}\left(n-2k\right)X^{n-2k-1}+\sum_{k=0}^{[n/2]}(2k+1)a_{n-2k}X^{n-2k+1}$

P_{n+1} est donc la somme de deux polynômes à coefficients entiers positifs, c'est donc un polynôme à coefficients entiers positifs $\boxed{\text{les coefficients de } P_n \text{ sont des entiers positifs}}$

b) $P_0(1)=1$, $\forall n\in N$, $P_{n+1}(1)=(n+1)P_n(1)$ donc $\boxed{P_n(1)=n!}$

3) f est de classe C^∞ sur I, appliquons la formule de Taylor avec reste intégral

$\forall x\in I$, $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$

Pour $x\neq 0$ faisons dans l'intégrale le changement de variable affine $u=\dfrac{1}{x}(x-t)$

$$\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt=\int_1^0\frac{u^nx^n}{n!}(-x)f^{(n+1)}(x(1-u))du=\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1u^nf^{(n+1)}(x(1-u))du$$

si $x=0$ l'égalité est encore vraie donc

$$\boxed{\forall x\in I\ ,\ f(x)=S_n(x)+\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1u^nf^{(n+1)}(x(1-u))du}$$

4) $a_n=\dfrac{P_n(0)}{n!}\geq 0$ puisque les coefficients de P_n sont positifs

si $0\leq x<\dfrac{\pi}{2}$, la série $\sum a_nx^n$ a pour somme partielle $S_n(x)$, elle est à termes positifs, elle converge si et seulement si la suite $(S_n(x))_{n\in N}$ est majorée

or P_{n+1} étant à coefficients positifs, $f^{(n+1)}$ est positive sur $[0,\dfrac{\pi}{2}[$, donc si $x\geq 0$, $\displaystyle\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt\geq 0$

On en déduit que si $0\leq x<\dfrac{\pi}{2}$, $S_n(x)\leq f(x)$ donc la série $\sum a_nx^n$ converge

donc $\boxed{\text{le rayon de convergence de la série entière } \sum a_nx^n \text{ est supérieur ou égal à } \frac{\pi}{2}}$

5) a) toutes les dérivées de f étant positives sur $[0,\dfrac{\pi}{2}[$, elles sont croissantes sur cet intervalle

si $0\leq x<y<\dfrac{\pi}{2}$, $\forall u\in[0,1]$, $0\leq x(1-u)\leq y(1-u)<\dfrac{\pi}{2}$

donc $$0\leq f^{(n+1)}(x(1-u))\leq f^{(n+1)}(y(1-u))$$

soit en intégrant entre 0 et 1, $0\leq R_n(x)\leq\dfrac{x^{n+1}}{n!}\displaystyle\int_0^1u^nf^{(n+1)}(y(1-u))du=\frac{x^{n+1}}{y^{n+1}}R_n(y)$

donc $\boxed{0\leq R_n(x)\leq\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}R_n(y)}$

b) si $y\in]0,\dfrac{\pi}{2}[$, $S_n(y)\geq 0$ donc $R_n(y)\leq f(y)$ donc $\boxed{0\leq R_n(x)\leq\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}f(y)}$

6) Pour tout $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}[$, il existe y tel que $x<y<\dfrac{\pi}{2}$, d'après 5) $0\leq f(x)-S_n(x)\leq\left(\dfrac{x}{y}\right)^{n+1}f(y)$

Comme $0\leq\left(\dfrac{x}{y}\right)<1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(f(x)-S_n(x))=0$

donc si $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}[$, $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\sum_{k=0}^{+\infty}a_{2k}x^{2k}$ (puisque f est paire, $f^{(2k+1)}(0)=0$)

si $x\in]-\dfrac{\pi}{2},0]$, $f(-x)=f(x)$ donc $\boxed{\text{pour tout } x\in I\ ,\ f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_{2k}x^{2k}}$

7) a) $1\in I$, donc la série $\sum a_{2k}$ converge donc $\boxed{\text{la suite } (a_{2k}) \text{ converge vers } 0}$

b) Pour tout $\varepsilon\in]0,\dfrac{\pi}{2}[$, $0<\left(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)<\dfrac{\pi}{2}$, la série entière $\sum a_{2k}\left(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)^{2k}$ converge , donc la suite positive $\left(a_{2k}\left(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)^{2k}\right)$ converge vers 0, elle est donc bornée

c) $\sqrt{2}\in]0,\dfrac{\pi}{2}[$ donc la série $\sum a_{2k}(\sqrt{2})^{2k}$ converge

donc la suite $\left(a_{2k}2^k\right)$ est bornée

d) La série de terme général $u_n=\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}}$ est une série alternée telle que la suite $(|u_n|)$ est décroissante et converge vers 0 donc sa somme S est encadrée par deux sommes partielles consécutives, en particulier

$1-\dfrac{1}{3^{2k+1}}\leq S\leq 1$

Si $k=0$, $a_0=1$ donc l'inégalité est vérifiée

Si $k\geq 1$, $1-\dfrac{1}{27}\leq 1-\dfrac{1}{3^{2k+1}}\leq S\leq 1$

$$3^k a_{2k} = \left(\frac{12}{\pi^2}\right)^k \times \frac{4}{\pi} S \geq \left(\frac{12}{\pi^2}\right)^k \times \frac{26\times 4}{27\times\pi} \geq 1 \text{ car } \left(\frac{26\times 4}{27\times\pi} \simeq 1.2261 > 1,\ \frac{12}{\pi^2} > 1 \right)$$

$$2^k a_{2k} = \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^k \times \frac{4}{\pi} S = \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^{k+2/3} \frac{1}{\pi^{1/3}} S \leq 1 \text{ car } \left(\frac{8}{\pi^2} < 1 \text{ et } \frac{1}{\pi^{1/3}} S \leq \frac{1}{\pi^{1/3}} \leq 1 \right)$$

donc $\boxed{\text{pour tout } k \in N\ ,\ \frac{1}{3^k} \leq a_{2k} \leq \frac{1}{2^k}}$

Exercice 3

1) a) Comme $2n-1 \geq 1$, $1 = (1-X+X)^{2n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n-1}^k X^k (1-X)^{2n-1-k} + \sum_{k=n}^{2n-1} C_{2n-1}^k X^k (1-X)^{2n-1-k}$

soit $1 = (1-X)^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n-1}^k X^k (1-X)^{n-1-k} \right) + X^n \left(\sum_{k=n}^{2n-1} C_{2n-1}^k X^{k-n} (1-X)^{2n-1-k} \right)$

posons $\boxed{f_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n-1}^k X^k (1-X)^{n-1-k}}$ et $\boxed{g_n(X) = \sum_{k=n}^{2n-1} C_{2n-1}^k X^{k-n} (1-X)^{2n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n-1}^{n+k} X^k (1-X)^{n-1-k}}$

f_n et g_n sont des polynômes de $R_{n-1}[X]$ tels que $(1-X)^n f_n(X) + X^n g_n(X) = 1$

b) $\boxed{f_1(X) = 1\ ,\ \ f_2(X) = 2X+1\ ,\ \ f_3(X) = 6X^2+3X+1}$

2) Si $(1-X)^n A(X) + X^n B(X) = 1$ alors $(1-X)^n (A(X) - f_n(X)) = X^n (g_n(X) - B(X))$
0 est racine d'ordre au moins n de $(1-X)^n (A(X) - f_n(X))$ donc de $(A(X) - f_n(X))$
il existe donc un polynôme Q tel que $A(X) = f_n(X) + X^n Q$ et $X^n (g_n(X) - (1-X)^n Q - B(X)) = 0$
Comme X^n n'est pas le polynôme nul alors $B(X) = g_n(X) + (1-X)^n Q$
réciproquement si $A(X) = f_n(X) + X^n Q$ *et* $B(X) = g_n(X) - (1-X)^n Q$ alors $(1-X)^n A(X) + X^n B(X) = 1$

$$\boxed{\text{Donc} \left\{ \begin{array}{c} (1-X)^n A(X) + X^n B(X) = 1 \\ A, B \in R[X] \end{array} \right. \iff \exists Q \in R[X]\ ,\ \left\{ \begin{array}{l} A(X) = f_n(X) + X^n Q \\ B(X) = g_n(X) - (1-X)^n Q \end{array} \right.}$$

si A est de degré inférieur ou égal à $n-1$, nécessairement $Q = 0$ donc il ya unicité de f_n et g_n

3) a) Si $(1-X)^n f_n(X) + X^n g_n(X) = 1$ alors $(X)^n f_n(1-X) + (1-X)^n g_n(1-X) = 1$
$f_n(1-X)$ et $g_n(1-X)$ sont des polynômes de $R_{n-1}[X]$ qui vérifient $(1-X)^n g_n(1-X) + X^n f_n(1-X) = 1$
d'après l'unicité de f_n et g_n $\boxed{f_n(1-X) = g_n(X) \text{ et } g_n(1-X) = f_n(X)}$

b) $\forall x \in R,\ (1-x)^n f_n(x) + x^n g_n(x) = 1$ donc pour $x = 0$ on obtient $\boxed{f_n(0) = 1}$

$\forall x \in R,\ f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n-1}^k x^k (1-x)^{n-1-k}$ donc pour $x = 1$ on obtient $\boxed{f_n(1) = C_{2n-1}^{n-1} = C_{2n-1}^n}$

$\forall x \in R,\ f_n(1-x) = g_n(x)$ et $(1-x)^n f_n(x) + x^n g_n(x) = 1$ donc pour $x = \frac{1}{2}$ on obtient $\boxed{f_n\left(\frac{1}{2}\right) = g_n\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{n-1}}$

4) a) Si $x \neq 1$ dons si $x \in]-1,1[$, $f_n(x) = \frac{1}{(1-x)^n} + x^{n-1} \frac{x g_n(x)}{(1-x)^n}$

comme $\lim_{x\to 0} \frac{x g_n(x)}{(1-x)^n} = 0$, $\boxed{f_n(x) \underset{x\to 0}{=} (1-x)^{-n} + o\left(x^{n-1}\right)}$

b) f_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, donc $f_n(x)$ est la partie régulière du développement limité d'ordre $(n-1)$ de $(1-x)^{-n}$

or $(1-x)^{-n} \underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-n)...(-n-k+1)}{k!} (-1)^k x^k + o(x^{n-1}) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} C_{n+k-1}^k x^k + o(x^{n-1})$

donc $\boxed{f_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k-1}^k X^k = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k-1}^{n-1} X^k}$

c) Les coefficients de f_n sont tous positifs, le coefficient constant est 1, donc $\forall x \in R^+$, $f_n(x) \geq 1$

$\boxed{\text{L'équation } f_n(x) = 0 \text{ n'a pas de racine positive ou nulle}}$

5) a) en dérivant la relation $(1-X)^n f_n(X) + X^n g_n(X) = 1$, on obtient :
$(1-X)^{n-1} (n f_n(X) - (1-X) f_n'(X)) = X^{n-1} (n g_n(X) + X g_n'(X))$

$n f_n(X) - (1-X) f_n'(X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $(n-1)$ qui admet 0 comme racine d'ordre au moins $(n-1)$ donc il existe un réel k tel que $n f_n(X) - (1-X) f_n'(X) = k X^{n-1}$, $f_n(1) = C_{2n-1}^n$ donc $k = n C_{2n-1}^n$

donc $\boxed{\forall x \in R\ ,\ n f_n(x) - (1-x) f_n'(x) = n C_{2n-1}^n x^{n-1}}$

b) Supposons que l'équation $f_n(x) = 0$ ait au moins deux racines réelles strictement négatives, notons a et b deux racines consécutives de f_n , ($a < b < 0$)

$f_n'(a) = \dfrac{-nC_{2n-1}^n a^{n-1}}{1-a}$ donc $f_n'(a)$ est non nulle et du signe de $(-1)^n$ de même pour $f_n'(b)$

f_n garde un signe constant sur $]a, b[$, $f_n(a) = f_n(b) = 0$, $f_n'(a)$ et $f_n'(b)$ sont de même signe, on a une impossibilité

6) h_n est de classe C^1 sur R et $\forall x \in R$, $h_n'(x) = x^{n-1}(1-x)^{n-1}$

h_n est un polynôme dont le terme de plus haut degré est $\dfrac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}$ donc

si n est pair , $\lim\limits_{+\infty} h_n = -\infty$, $\lim\limits_{-\infty} h_n = +\infty$, si n est impair , $\lim\limits_{+\infty} h_n = +\infty$, $\lim\limits_{-\infty} h_n = -\infty$ donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
h_{2n+1}'		$+$		$+$	
h_{2n+1}	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
h_{2n}'		$-$	0	$+$	0	$-$	
h_{2n}	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$h_n(1)$	$\searrow$	$-\infty$

Posons $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q dt$ avec p et q entiers naturels

$$I(p,q) = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}(1-t)^q\right]_0^1 + \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1) \text{ si } q \geq 1$$

donc $I(p,q) = \dfrac{q!p!}{(p+q)!} I(p+q, 0) = \dfrac{q!p!}{(p+q+1)!}$ $\boxed{h_n(1) = I(n-1, n-1) = \dfrac{(n-1)!(n-1)!}{(2n-1!} = \dfrac{1}{nC_{2n-1}^n}}$

7) a) Sur $]-\infty, 1[$, f_n est la solution vérifiant $f_n(0) = 1$ de l'équation différentielle :

$(E) \quad (1-x)y' - ny = -nC_{2n-1}^n x^{n-1}$

L'équation sans second membre a pour solution toutes les fonctions : $x \to \dfrac{\lambda}{(x-1)^n}$ avec $\lambda \in R$

Employons la méthode de variation de la constante

$x \to \dfrac{\lambda(x)}{(1-x)^n}$ est solution de (E) sur $]-\infty, 1[$ si et seulement si $\lambda'(x) = -nC_{2n-1}^n x^{n-1}(1-x)^{n-1}$

donc si et seulement si $\lambda(x) = -nC_{2n-1}^n h_n(x) + cte$ sur $]-1, +\infty[$

donc il existe $k \in R$ tel que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $f_n(x) = \dfrac{k - nC_{2n-1}^n h_n(x)}{(1-x)^n}$

$f_n(0) = 1$ donc $k = 1$ donc pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $(1-x)^n f_n(x) = 1 - nC_{2n-1}^n h_n(x)$

deux fonctions polynômes égales sur $]-\infty, 1[$ sont égales sur R

donc $\forall x \in R$, $(1-x)^n f_n(x) = 1 - nC_{2n-1}^n h_n(x)$ donc $\boxed{\forall x \neq 1 \text{ , } f_n(x) = \dfrac{1 - nC_{2n-1}^n h_n(x)}{(1-x)^n}}$

b) f_n est continue en 1 donc $f_n(1) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1 - nC_{2n-1}^n h_n(x)}{(1-x)^n}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(-nC_{2n-1}^n \dfrac{h_n(x) - h_n(1)}{(1-x)^n}\right)$

$h_n'(x) = x^{n-1}(1-x)^{n-1}$ donc $h_n^{(k)}(1) = 0$ si $1 \leq k \leq n-1$ et en utilisant la formule de Leibniz

$h_n^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{(n-1)!(n-1)!}{(n-1-k)!(k)!} x^{n-1-k}(-1)^{n-1-k}(1-x)^k$ donc $h_n^{(n)}(1) = (n-1)!\,(-1)^{n-1}$

$(h_n(x) - h_n(1)) \underset{x\to 1}{\backsim} \dfrac{(x-1)^n}{n!} h_n^{(n)}(1) = -\dfrac{(1-x)^n}{n}$ on retrouve donc que $f_n(1) = C_{2n-1}^n$

8) $x \in]-\infty, 0[$ est solution de $f_n(x) = 0$ si et seulement si $h_n(x) = \dfrac{1}{nC_{2n-1}^n} > 0$

En utilisant les variations de h_n vues au 6) on en déduit que :

Si n est impair $f_n(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-\infty, 0[$ donc pas de solution sur R

Si n est pair $f_n(x) = 0$ a une solution et une seule sur $]-\infty, 0[$ donc une solution et une seule sur R

9) $f_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k-1}^{n-1} z^k$ d'après 4) . Si $|z| \geq 1$, $f_n(z) = C_{2n-1}^{n-1} z^{n-1}\left(1 + \dfrac{1}{C_{2n-1}^{n-1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} C_{n+k-1}^{n-1}\frac{1}{z^{k-n+1}}\right)$

soit $B = \dfrac{1}{C_{2n-1}^{n-1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} C_{n+k-1}^{n-1}\frac{1}{z^{k-n+1}}$, $|B| \leq \dfrac{1}{C_{2n-1}^{n-1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} C_{n+k-1}^{n-1} = \frac{1}{C_{2n-1}^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-2}(C_{n+k}^n - C_{n+k-1}^n) = \frac{C_{2n-2}^n}{C_{2n-1}^{n-1}}$

$\dfrac{C_{2n-2}^n}{C_{2n-1}^{n-1}} = \dfrac{n-1}{(2n-1)} < 1$ donc $1 + B$ ne s'annule pas et si $|z| \geq 1$, $f_n(z) \neq 0$

$\boxed{\text{donc toutes les racines complexes de } f_n(z) = 0 \text{ sont de modules strictement inférieurs à } 1}$