22BE

e3a concours

Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 1 PC

durée 3 heures

Exercice 1

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0,+\infty[$ par :

$$f_0(x)=0 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,+\infty[,\ f_{n+1}(x)=f_n(x)+\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2x}-f_n^2(x)\right).$$

1°. (a) Montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$:

$$\mathrm{e}^{-x}-f_{n+1}(x)=\left(\mathrm{e}^{-x}-f_n(x)\right)\phi(x),\ \text{ où } \phi(x)=1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}f_n(x).$$

(b) Prouver que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x\in[0,+\infty[$: $0\leqslant f_n(x)\leqslant \mathrm{e}^{-x}$. En déduire que la suite (f_n) est croissante et convergente. Préciser sa limite.

2°. Soit $a\in]0,+\infty[$.

(a) Montrer qu'il existe $k_a\in]0,1[$ tel que :

$$\forall x\in[0,a],\ \mathrm{e}^{-x}-f_{n+1}(x)\leqslant k_a\left(\mathrm{e}^{-x}-f_n(x)\right).$$

(b) En déduire la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[0,a]$ pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$.

3°. On pose $u_n=1-f_n(0)$.

(a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=2^{1-2^n}$.

(b) Étudier la convergence de la série de terme général u_n.

Exercice 2

On désigne par $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $[0,+\infty[$, de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $[0,+\infty[$.

On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{F}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

$(P_1)\ :\ f(0)=0$

$(P_2)\ :\ \forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) \in \mathbb{R}\quad$ [rappel : $f^{(0)}(x)=f(x)$]

On note ϕ l'application définie sur $\mathcal{E}$ par :

$$\forall f \in \mathcal{E},\ \forall x \in [0,+\infty[,\qquad \phi(f)(x)=f'(x)-f'(0).$$

1°. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2°. **(a)** Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

(b) Prouver que ϕ est injective.

3°. On définit sur $[0,+\infty[$ l'application g par :

$$g\ :\ x \mapsto (x+1)\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right)-\frac{\pi}{2}x.$$

(a) Calculer $g'(x)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, il existe deux fonctions polynomiales P_n et Q_n telles que :

$$g^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right)+Q_n\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right).$$

En déduire que $g' \in \mathcal{E}$.

(b) Déterminer l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{F}$ vérifiant

$$\forall x \in [0,+\infty[,\quad f'(x)-f'(0)=g'(x).$$

En déduire que ϕ n'est pas surjective.

4°. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ.

Exercice 3

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^x \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 1.$$

1°. **(a)** Étudier la continuité de f.

(b) Étudier l'existence des dérivées partielles de f au point $(0,0)$.

(c) Déterminer et tracer la ligne de niveau 1 de f.

2°. On définit la fonction g sur R par :

$$g \ : \ x \mapsto f(x,0) - 1 \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } g(0) = 1.$$

(a) Dresser avec précision le tableau de variations de la fonction g.

(b) En déduire que la fonction f n'admet pas d'extremum en $(0,0)$ (justifier soigneusement la réponse).

3°. Déterminer les points critiques de la fonction f.

4°. **(a)** Vérifier que, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x,y) \geqslant g(x)$.

En déduire que f admet un minimum en $\left(\frac{1}{e}, 0\right)$.

(b) La fonction f admet-elle un extremum en $\left(-\frac{1}{e}, 0\right)$?

5°. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, les deux expressions :

$$\big(f(x,1) - f(0,1)\big) \text{ et } \big(f(x,-1) - f(0,-1)\big)$$

sont du signe de x.

Que peut-on en conclure?