Corrigé de l'épreuve e3a (PC1)

Exercice 1

1°.a) $e^{-x}-f_{n+1}(x) = e^{-x}-f_n(x)-\frac{1}{2}(e^{-2x}-f_n^2(x)) = (e^{-x}-f_n(x))\left(1-\frac{1}{2}(e^{-x}-f_n(x))\right)$
$= (e^{-x}-f_n(x))\phi(x).$

b) On montre par récurrence sur n que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-x}$:

* $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_0(x) = 0$ donc l'encadrement est vérifié au rang 0.

* On suppose l'encadrement réalisé au rang n ;

au rang $n+1$: $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}(e^{-2x} - f_n^2(x)) \geqslant 0$

et $e^{-x} - f_{n+1}(x) = (e^{-x} - f_n(x))\phi(x)$; or $f_n(x) \leqslant e^{-x} \Longrightarrow \phi(x) \geqslant 1 - e^{-x} \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$,

donc $f_{n+1}(x) \leq e^{-x}$.

Par suite, l'encadrement est vrai au rang $n+1$;

on en déduit qu'il est vrai pour tout n.

De plus : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{2}(e^{-2x} - f_n^2(x)) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$:

la suite (f_n) est donc croissante .

Pour tout x fixé, la suite $(f_n(x))_n$ est croissante ;

étant majorée par e^{-x},elle est donc convergente.

La fonction $\varphi : u \longmapsto u + \frac{1}{2}\left(e^{-2x} - u^2\right)$ étant continue sur $\mathbb{R}$,

la limite $l(x)$ de la suite est un point fixe de φ.

On en déduit que $l(x) = \pm e^{-x}$;comme de plus ,la suite est positive ou nulle, la limite ne peut qu'être égale à e^{-x}.

La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$vers $x \longmapsto e^{-x}$.

2° a) $\forall x \in [0,a] \quad 0 \leqslant \phi(x) \leqslant 1 - \frac{1}{2}e^{-x} \leqslant 1 - \frac{1}{2}e^{-a} = k_a$.

Il existe donc $k_a \in]0,1[$ tel que :$\forall x \in [0,a] \qquad 0 \leqslant e^{-x} - f_{n+1}(x) \leq k_a\,(\,e^{-x} - f_n(x))$.

b) On en déduit que :$\forall x \in [0,a] \quad 0 \leqslant e^{-x} - f_n(x) \leqslant k_a^n.e^{-x} \leqslant k_a^n$.

Comme $\lim\limits_{n} k_a^n = 0$,on conclut que (f_n) converge uniformément sur $[0,a]$ vers $x \longmapsto e^{-x}$..

3° a) On a : $u_{n+1} = u_n\phi(0) = \frac{1}{2}u_n^2$.

Donc $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1}^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^2} \times ... \times \frac{1}{2^{2^{n-1}}}\left(u_0\right)^{2^n} = \frac{\left(u_0\right)^{2^n}}{2^{2^{n-1}}} = 2\left(\frac{u_0}{2}\right)^{2^n} = 2^{1-2^n}$.

b) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; la série de terme général u_n étant à termes positifs est convergente en vertu de la règle de D'Alembert.

Exercice 2

1°. $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{F}$ et contient l'application nulle de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

De la linéarité de la limite et de dérivée n-ième,
on déduit que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel}}$$

2°.a.) ϕ est définie sur $\mathcal{E}$, on vérifie que : $\phi(f)(0) = 0$ et comme $\forall n \in \mathbb{N}$ $\phi(f)^{(n)} = f^{(n+1)}$,
$\lim\limits_{+\infty} \phi(f)^{(n)} \in \mathbb{R}$ .donc $\phi(f) \in \mathcal{E}$.
De la linéarité de la dérivation, on déduit que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$

$$\boxed{\phi \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{E}}$$

2.b.) Supposons $\phi(f) = 0,\ f \in \mathcal{E},\ \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f'(x) = f'(0)$.
Il existe donc un réel k tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = xf'(0) + k$.
Or $f(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = xf'(0)$
De plus $\lim\limits_{+\infty} f \in \mathbb{R}$ donc $f = 0$

$$\boxed{\phi \text{ est injective}}$$

3. Soit g définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) = (x+1)\sin\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right) - \dfrac{\pi}{2}x$,
g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :
$\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right) - \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\cos\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right) - \dfrac{\pi}{2}.$
soit la proposition de récurrence suivante :
$\mathcal{P}(n) : \forall x \in \mathbb{R}^+, g^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right) + Q_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right)$
avec P_n et Q_n fonctions polynomiales, $n \in \mathbb{N}^*$.
Avec : $P_1(x) = 1, Q_1(x) = -\dfrac{\pi}{2}x$, on trouve que :
$g'(x) = P_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right) + Q_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right) - \dfrac{\pi}{2}.$
La dérivée de $x \mapsto P_n(x)\sin(\pi x) + Q_n(x)\cos(\pi x)$ est :
$x \mapsto (P_n'(x) - \pi Q_n(x))\sin(\pi x) + (Q_n'(x) + \pi P_n(x))\cos(\pi x)$
et la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+1}\right)^3}$
donc par dérivation d'une fonction composée : la dérivée de
$x \mapsto P_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right) + Q_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right)$
est la fonction :
$x \mapsto P_{n+1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right) + Q_{n+1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right)$
avec : $P_{n+1}(X) = -\dfrac{1}{2}X^3(P_n'(X) - \pi Q_n(X))$ et : $Q_{n+1}(X) = -\dfrac{1}{2}X^3(Q_n'(X) + \pi P_n(X))$
Ainsi on prouve que $\mathcal{P}(2)$ est vraie et que si $\mathcal{P}(n)$ est vraie alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie ,

donc grâce au théorème de récurrence :

$$\boxed{\mathcal{P}(n) \text{ est vraie pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\, n \geqslant 2}$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}^+, g'(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right) - \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\cos\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right) - \dfrac{\pi}{2}$,
$g'(0) = 0$ et de la forme de $g^{(n)}$ et comme $\lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right) = 0$,
$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} g^{(n)}(x) = Q_n(0)$. On en déduit que :

$$\boxed{g' \in \mathcal{E}}$$

b) Supposons f élément de $\mathcal{F}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \;\; f'(x) - f'(0) = g'(x)$.
On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = g(x) + f'(0)x + cte.$
Réciproquement en supposant $\forall x \in \mathbb{R}_+ \;\; f(x) = g(x) + ax + b$,
on en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \;\; f'(x) = g'(x) + a$
donc $\forall x \in \mathbb{R}^+ \;\; f'(x) - f'(0) = g'(x)$
d'où

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{l'ensemble des fonctions } f \text{de } \mathcal{F} \text{ telles que : : } \forall x \in \mathbb{R}^+ \;\; f'(x) - f'(0) = g'(x) \text{ est composé} \\ \text{des fonctions telles qu'il existe 2 réels } a \text{ et } b \text{ tels que : } \forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = g(x) + ax + b\end{array}}$$

Supposons qu'une telle fonction f appartienne à $\mathcal{E}$; alors $f(0) = 0$ donc $b = 0$.
De plus :$(x+1)\sin\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{x+1}}\right) \underset{x \mapsto +\infty}{\sim} \pi\sqrt{x+1}$
donc pour $a \neq \dfrac{\pi}{2}$, $f(x) \underset{x \mapsto +\infty}{\sim} \left(a - \dfrac{\pi}{2}\right)x$
et pour $a = \dfrac{\pi}{2}$, $f(x) \underset{x \mapsto +\infty}{\sim} \pi\sqrt{x+1}$.
donc f a une limite non finie en $+\infty$, ainsi $f \notin \mathcal{E}$,
il n'existe donc pas d'élément f de $\mathcal{E}$ tel que : $\phi(f) = g'$

$$\boxed{\phi \text{ n'est pas surjective}}$$

4. On sait tout d'abord que 0 n'est pas valeur propre de ϕ puisque ϕ est injective.
Soit λ un réel non nul, et supposons f élément de $\mathcal{E}$ tel que : $\phi(f) = \lambda f$.
Alors $\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) - f'(0) = \lambda f(x)$, ainsi f vérifie :

$$(1) \;\; \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f'(x) - \lambda f(x) = f'(0)$$

Résolvons : $y'(x) - \lambda y(x) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \;/\; y(x) = ke^{\lambda x}$
puis $y'(x) - \lambda y(x) = a$, a réel (E)
Une solution évidente de (E) est : $x \mapsto -\dfrac{a}{\lambda}$ donc : y est solution de (E) sur $\mathbb{R}^+$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad y(x) = -\dfrac{a}{\lambda} + ke^{\lambda x}$
En réinjectant l'expression $f(x) = -\dfrac{a}{\lambda} + ke^{\lambda x}$, on obtient que $a = k\lambda$,

Figure 1:

donc (1) équivaut à $\exists k \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x) = k\left(e^{\lambda x} - 1\right)$.

Il reste à vérifier si : $f \in \mathcal{E}$

On a bien $f(0) = 0$ et : pour k non nul :

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lambda < 0$

dans ce cas : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f^{(n)}(x) = k\lambda^n e^{\lambda x}$ donc $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f^{(n)}(x) = 0 \in \mathbb{R}$.

Ainsi

$$Sp(\phi) = \mathbb{R}_-^* \text{ et } E_\phi(\lambda) = Vect(f_\lambda) \text{ avec : } \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f_\lambda(x) = e^{\lambda x} - 1$$

Exercice 3

1°a) En passant en coordonnées polaires, $f(x,y) = \rho^{2\rho\cos\theta} = e^{2\cos\theta.\rho\ln\rho}$; or $\lim\limits_{(x,y) \overset{\neq}{\to} (0,0)} \rho\ln\rho = 0$ et $2\cos\theta$ est bornée,

donc, $f(x,y) \underset{(x,y) \overset{\neq}{\to} (0,0)}{\longrightarrow} 1 = f(0,0)$ et f est continue en $(0,0)$.

Comme d'après les théorèmes généraux de continuité,

f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) $\dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \dfrac{e^{x\ln x^2} - 1}{x} \sim \dfrac{x\ln x^2}{x} = \ln x^2 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\infty$:

f n'admet donc pas de dérivée partielle par rapport à la première variable en $(0,0)$.

Figure 2:

De plus, $\dfrac{f\,(0,y)-f\,(0,0)}{y}=0\underset{y\to 0}{\longrightarrow}0$:

f admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable en $(0,0)$ égale à 0.

c) $f(0,0)=1$ et pour $(x,y)\neq(0,0)$

$$f(x,y)=1\iff\left(x^2+y^2\right)^x=1\Leftrightarrow x\ln(x^2+y^2)=0$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0\text{ ou}\\ x^2+y^2=1\end{array}\right.$$

2°a) Soit $g(x)=f(x,0)$;

g est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$;

$\forall x\in\mathbb{R}^*\ g'(x)=\left(\ln x^2+2\right)\left(x^2\right)^x$

L'on a vu ci-dessus que $\dfrac{g(x)-g(0)}{x}\underset{x\to 0}{\to}-\infty$: la courbe de g présente donc une tangente verticale en $(0,0)$.

$\lim\limits_{-\infty}g=0$ et $\underset{+\infty}{lim}g=+\infty$.

b) Pour $x\in\left]-\dfrac{1}{e},0\right[$, $g(x)>g(0)=1$ donc $f(x,0)>f(0,0)$: f n'admet pas de maximum en $(0,0)$.

Pour $x\in\left]0,\dfrac{1}{e}\right[$, $g(x)<g(0)=1$donc $f(x,0)<f(0,0)$: f n'admet pas de minimum en $(0,0)$.

f n'admet donc pas d'extremum en $(0,0)$.

3°) Pour $(x,y)\neq(0,0)$,on a:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\left(\ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)f(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}f(x,y).$$

Les points critiques sont donc solutions de :

Figure 3:

$$\left\{\begin{array}{l}\ln\left(x^2+y^2\right)+\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}=0\\ \dfrac{2xy}{x^2+y^2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}x=0 \text{ et } y=\pm 1\\ \text{ou } y=0 \text{ et } x=\pm\dfrac{1}{e}\end{array}\right.$$

Ce sont donc : $(0,1),(0,-1),(\frac{1}{e},0)$ et $\left(-\frac{1}{e},0\right)$.

4°a) Pour $(x,y)\neq(0,0)$ et $x>0$, $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^x \geqslant x^{2x}=f(x,0)=g(x)$.

$f(0,0)=1\geqslant g(0)=1$

donc pour tout $x\geqslant 0$, $\;f(x,y)\geqslant g(x)$.

Or g admet un minimum en $\dfrac{1}{e}$; on en déduit que f admet un minimum en $\left(\frac{1}{e},0\right)$.

b) $f(x,0)=g(x)\leqslant g(-\frac{1}{e})=f\left(-\frac{1}{e},0\right)$ pour tout $x<0$;

d'autre part , $xlnx^2-x\ln\left(x^2+y^2\right)=x\ln\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\geqslant 0$ pour tout $x<0$.

Donc $f(x,y)=e^{x\ln\left(x^2+y^2\right)}\leqslant e^{x\ln^{x^2}}=f(x,0)\leq f\left(-\frac{1}{e},0\right)$.

f admet donc un maximum en $\left(-\frac{1}{e},0\right)$.

5°) Soit $h(x)=f(x,1)-f(0,1)=(x^2+1)^x-1$;

$h'(x)=\left(\ln\left(x^2+1\right)+\dfrac{2x^2}{x^2+1}\right)h(x)=k(x)h(x)$

$k'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}(1+\dfrac{2}{x^2+1})$.

$k'(x)$ est du signe de x ;

k est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Comme $k(0) = 0$, k et donc h' est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$, et s'annule en 0.

h est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$;comme $h(0) = 0$, $h(x)$ est du signe de x .

De même, $f(x, -1) - f(0, -1)$ est du signe de x :

f n'admet pas d'extremum en $(0, 1)$ ni en $(0, -1)$.

En fait, ce sont des cols ; bon exercice : compléter les courbes de niveaux dans la figure ci-dessus !