



## Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé, où  $\mathcal{A}$  est une tribu sur  $\Omega$  et  $\mathbb{P}$  une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

Toutes les variables aléatoires sont discrètes, à valeurs réelles ou complexes, définies sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

Si la variable aléatoire  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est d'espérance finie, on note  $\mathbb{E}(X)$  son espérance.

Pour tout nombre complexe  $z$ , on note  $\operatorname{Re}(z)$  sa partie réelle,  $\operatorname{Im}(z)$  sa partie imaginaire et  $\bar{z}$  son conjugué.

On appelle *sinus cardinal* la fonction définie, pour tout réel  $x$ , par  $\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

On admet que cette fonction est continue et que pour tout réel  $x$ ,  $|\operatorname{sinc}(x)| \leq 1$ .

On étend aux variables aléatoires discrètes à valeurs complexes la notion d'espérance définie pour les variables aléatoires discrètes réelles. Ainsi, on dit qu'une variable aléatoire discrète à valeurs complexes  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  est *d'espérance finie* si les variables aléatoires réelles  $\operatorname{Re}(Z)$  et  $\operatorname{Im}(Z)$  sont d'espérance finie et on définit alors l'espérance de  $Z$  par

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(\operatorname{Re}(Z)) + i\mathbb{E}(\operatorname{Im}(Z)).$$

On admettra les résultats suivants qui étendent aux variables aléatoires complexes les résultats analogues sur les variables aléatoires réelles.

— Toute variable aléatoire  $Z$  complexe finie est d'espérance finie. Si  $Z(\Omega) = \{z_1, \dots, z_r\}$ , où les  $z_i$  sont deux à deux distincts, alors

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=1}^r z_k \mathbb{P}(Z = z_k).$$

— *Théorème du transfert (cas  $X(\Omega)$  fini)*. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle d'image finie  $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_r\}$  où les  $x_i$  sont deux à deux distincts et soit  $f$  une application à valeurs complexes définie sur  $X(\Omega)$ .

Alors  $f(X)$  est d'espérance finie et

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{k=1}^r \mathbb{P}(X = x_k) f(x_k).$$

— Soit  $Z$  une variable aléatoire complexe telle que  $Z(\Omega)$  soit dénombrable égal à  $\{z_n, n \in \mathbb{N}\}$  où les  $z_n$  sont deux à deux distincts. Alors  $Z$  est d'espérance finie si, et seulement si, la série  $\sum_{n \geq 0} z_n \mathbb{P}(Z = z_n)$  converge absolument. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z_n \mathbb{P}(Z = z_n).$$

— *Théorème du transfert (cas  $X(\Omega)$  dénombrable)*. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle d'image dénombrable  $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  où les  $x_n$  sont deux à deux distincts et soit  $f$  une application à valeurs complexes définie sur  $X(\Omega)$ .

Alors  $f(X)$  est d'espérance finie si, et seulement si, la série  $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = x_n) f(x_n)$  converge absolument. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_n) f(x_n).$$

— Soit  $Z$  une variable aléatoire complexe et  $\bar{Z} : \omega \in \Omega \mapsto \overline{Z(\omega)}$  sa variable aléatoire conjuguée.

Si  $Z$  est d'espérance finie, alors  $\bar{Z}$  est d'espérance finie et  $\mathbb{E}(\bar{Z}) = \overline{\mathbb{E}(Z)}$ .

— Soit  $Z_1$  et  $Z_2$  deux variables aléatoires complexes d'espérance finie et soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Alors  $Z_1 + Z_2$  et  $\lambda Z_1$  sont d'espérance finie et  $\mathbb{E}(Z_1 + Z_2) = \mathbb{E}(Z_1) + \mathbb{E}(Z_2)$  et  $\mathbb{E}(\lambda Z_1) = \lambda \mathbb{E}(Z_1)$ .

# I Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

À toute variable aléatoire réelle discrète  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , on associe une fonction  $\phi_X$ , appelée *fonction caractéristique* de  $X$  et définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}).$$

## I.A – Premières propriétés

Dans cette sous-partie,  $X$  est une variable aléatoire réelle discrète.

**Q 1.** On suppose, dans cette question, que  $X(\Omega)$  est un ensemble fini de cardinal  $r \in \mathbb{N}^*$ .

On note  $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_r\}$  où les  $x_i$  sont deux à deux distincts, et, pour tout entier  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $a_k = \mathbb{P}(X = x_k)$ .

Montrer que, pour tout réel  $t$ ,  $\phi_X(t) = \sum_{k=1}^r a_k e^{itx_k}$ .

**Q 2.** On suppose dans cette question que  $X(\Omega)$  est un ensemble dénombrable. On note  $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  où les  $x_n$  sont deux à deux distincts. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $a_n = \mathbb{P}(X = x_n)$ .

Montrer que  $\phi_X$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et que, pour tout réel  $t$ ,  $\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{itx_n}$ .

**Q 3.** Montrer que  $\phi_X$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Q 4.** Soit  $a$  et  $b$  deux réels et  $Y = aX + b$ . Pour tout réel  $t$ , exprimer  $\phi_Y(t)$  en fonction de  $\phi_X$ ,  $t$ ,  $a$  et  $b$ .

**Q 5.** Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Donner une expression de  $\phi_X(-t)$  en fonction de  $\phi_X(t)$ . En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur l'image  $\phi_X(\mathbb{R})$  pour que la fonction  $\phi_X$  soit paire.

## I.B – Trois exemples

**Q 6.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in ]0, 1[$ . On suppose que  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$  et on note  $q = 1 - p$ . Montrer que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\phi_X(t) = (q + pe^{it})^n$ .

**Q 7.** Soit  $p \in ]0, 1[$ . Quelle est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre  $p$  ?

**Q 8.** Soit  $\lambda > 0$ . Quelle est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  ?

## I.C – Image de $\phi_X$

On se donne ici une variable aléatoire réelle discrète  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , dont on note  $\phi_X$  la fonction caractéristique.

Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a + b\mathbb{Z}$  désigne l'ensemble  $\{a + bk, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Q 9.** Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|\phi_X(t)| \leq 1$ .

**Q 10.** Montrer que, s'il existe  $a \in \mathbb{R}$  et  $t_0 \in \mathbb{R}^*$  tels que  $X(\Omega) \subset a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$ , alors  $|\phi_X(t_0)| = 1$ .

On suppose réciproquement qu'il existe  $t_0 \in \mathbb{R}^*$  tel que  $|\phi_X(t_0)| = 1$ .

Dans la suite de cette sous-partie I.C, on suppose de plus que  $X(\Omega)$  est dénombrable et on reprend les notations de la question 2.

**Q 11.** Montrer qu'il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp(i(t_0 x_n - t_0 a)) = 1$ .

**Q 12.** En déduire que  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (1 - \cos(t_0 x_n - t_0 a)) = 0$ .

**Q 13.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si  $a_n \neq 0$ , alors  $x_n \in a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$ .

**Q 14.** En déduire que  $\mathbb{P}\left(X \in a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\right) = 1$ .

## II Fonction caractéristique et loi d'une variable aléatoire

L'objectif de cette partie est de montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire détermine sa loi. Deux méthodes de démonstration sont proposées.

### II.A – Première méthode

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle et discrète et  $m \in \mathbb{R}$ .

Pour  $T \in \mathbb{R}_+^*$ , on pose  $V_m(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \phi_X(t) e^{-imt} dt$ .

**II.A.1)** On suppose que  $X(\Omega)$  est fini et on reprend les notations de la question 1.

**Q 15.** Montrer que, pour tout  $T \in \mathbb{R}_+^*$ , on a  $V_m(T) = \sum_{n=1}^r \text{sinc}(T(x_n - m)) \mathbb{P}(X = x_n)$ .

**Q 16.** En déduire que  $V_m(T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = m)$ .

**II.A.2)** On suppose que  $X(\Omega)$  est dénombrable et on reprend les notations de la question 2.

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $h \in \mathbb{R}_+^*$ , on pose  $g_n(h) = \text{sinc}\left(\frac{x_n - m}{h}\right) \mathbb{P}(X = x_n)$ .

**Q 17.** Montrer que pour tout  $T \in \mathbb{R}_+^*$ , on a  $V_m(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n\left(\frac{1}{T}\right)$ .

**Q 18.** Montrer que la fonction  $g_n$  se prolonge en une fonction  $\tilde{g}_n$  définie et continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Q 19.** Montrer que la fonction  $G = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{g}_n$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Q 20.** Établir que  $V_m(T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = m)$ .

### II.A.3) Application

**Q 21.** Soient  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  deux variables aléatoires discrètes telles que  $\phi_X = \phi_Y$ . Montrer que, pour tout  $m \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{P}(X = m) = \mathbb{P}(Y = m)$ , autrement dit que  $X$  et  $Y$  ont la même loi.

### II.B – Deuxième méthode

Si  $a$  et  $b$  sont deux réels, on note  $K_{a,b}$  la fonction définie pour tout réel  $t$  par  $K_{a,b}(t) = \begin{cases} \frac{e^{itb} - e^{ita}}{2it} & \text{si } t \neq 0, \\ \frac{b-a}{2} & \text{si } t = 0. \end{cases}$

**Q 22.** À l'aide de séries entières, montrer que  $K_{a,b}$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $N$  un entier naturel et soit  $F_N$  la fonction définie, pour tout réel  $x$ , par  $F_N(x) = \int_{-N}^N K_{a,x}(t) dt$ .

**Q 23.** Montrer que  $F_N$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et que, pour tout réel  $x$ ,  $F'_N(x) = N \text{sinc}(Nx)$ .

**Q 24.** Montrer que  $\int_{-N}^N K_{a,b}(t) dt = \int_{Na}^{Nb} \text{sinc}(s) ds$ .

**Q 25.** Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \text{sinc}(s) ds$  est convergente.

On admettra dans la suite que  $\int_0^{+\infty} \text{sinc}(s) ds = \frac{\pi}{2}$ .

**Q 26.** En déduire l'existence et la valeur de  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N K_{a,b}(t) dt$  dans le cas où  $a < b$ .

**Q 27.** Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire telle que  $X(\Omega)$  est fini. On suppose que les réels  $a$  et  $b$  n'appartiennent pas à  $X(\Omega)$ . Montrer que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-N}^N \phi_X(-t) K_{a,b}(t) dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(a < X < b).$$

### III Régularité de $\phi_X$

On fixe dans cette partie une variable aléatoire réelle  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , dont l'image  $X(\Omega)$  est un ensemble dénombrable et on reprend les notations de la question 2.

On cherche à établir des liens entre des propriétés de la loi de  $X$  et la régularité de  $\phi_X$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on dit que  $X$  admet un moment d'ordre  $k$  si la variable aléatoire  $X^k$  est d'espérance finie.

#### III.A –

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On suppose dans cette sous-partie III.A que  $X$  admet un moment d'ordre  $k$ .

**Q 28.** Soit  $j$  un entier tel que  $1 \leq j \leq k$ . Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $|x|^j \leq 1 + |x|^k$  et en déduire que  $X$  admet un moment d'ordre  $j$ .

**Q 29.** En déduire que  $\phi_X$  est de classe  $C^k$  sur  $\mathbb{R}$  et donner une expression de la dérivée  $k$ -ième de  $\phi_X$ .

**Q 30.** En déduire une expression de  $\mathbb{E}(X^k)$  en fonction de  $\phi_X^{(k)}(0)$ .

#### III.B –

On suppose dans cette sous-partie III.B que  $\phi_X$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Q 31.** On note  $f$  la fonction qui à tout réel  $h > 0$  associe  $f(h) = \frac{2\phi_X(0) - \phi_X(2h) - \phi_X(-2h)}{4h^2}$ . Quelle est la limite de  $f$  en 0 ?

**Q 32.** Montrer que pour tout  $h \in \mathbb{R}^*$ ,  $f(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{\sin^2(hx_n)}{h^2}$ .

**Q 33.** En déduire que  $X$  admet un moment d'ordre 2.

#### III.C –

On fixe dans cette sous-partie III.C un entier naturel  $k \in \mathbb{N}$  et on suppose à la fois que  $\phi_X$  est de classe  $C^{2k+2}$  sur  $\mathbb{R}$  et que  $X$  admet un moment d'ordre  $2k$ . On note  $\alpha = \mathbb{E}(X^{2k})$ .

**Q 34.** Que peut-on dire de  $X$  si  $\alpha$  est nul ?

On suppose dorénavant que le réel  $\alpha$  est strictement positif.

**Q 35.** Soit  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire vérifiant  $Y(\Omega) = X(\Omega)$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{P}(Y = x_n) = \frac{a_n x_n^{2k}}{\alpha}.$$

Montrer que  $\phi_Y$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Q 36.** En déduire que  $X$  admet un moment d'ordre  $2k + 2$ .

**Q 37.** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Déduire des questions précédentes que si  $\phi_X$  est de classe  $C^{2k}$  sur  $\mathbb{R}$ , alors  $X$  admet un moment d'ordre  $2k$ .

### IV Développement en série entière de $\phi_X$

Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire réelle.

#### IV.A –

On suppose que  $X(\Omega)$  est fini et on reprend les notations de la question 1.

**Q 38.** Montrer que  $\phi_X$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout réel  $t$ ,  $\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}(X^n)$ .

#### IV.B –

On suppose que  $X(\Omega)$  est dénombrable et on reprend les notations de la question 2.

On suppose également que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X$  admet un moment d'ordre  $n$  et qu'il existe un réel  $R > 0$  tel que

$$\mathbb{E}(|X|^n) = O\left(\frac{n^n}{R^n}\right) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

**Q 39.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $\left| e^{iy} - \sum_{k=0}^n \frac{(iy)^k}{k!} \right| \leq \frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!}$ .

**Q 40.** En déduire que pour tout réel  $t \in \left[-\frac{R}{e}, \frac{R}{e}\right]$ ,

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}(X^k).$$

• • • FIN • • •