Centrale-Supélec PC 2020 — Maths 1

Denis Jourdan, Lycée du Parc, Lyon

I Cas des matrices de taille 2×2

Q 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par produit par blocs,

$$\boxed{J_n^2 = \begin{pmatrix} -I_n & 0_{n,n} \\ 0_{n,n} & -I_n \end{pmatrix} = -I_{2n}.}$$

On a clairement $J_n^\top = -J_n$ et donc $J_n^\top J_n J_n = -J_n^3 = J_n$. Autrement dit :

$$\boxed{J_n \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})}$$

Q 2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On calcule

$$M^\top J_1 M = \begin{pmatrix} 0 & ad - bc \\ bc - ad & 0 \end{pmatrix} = \det(M) J_1$$

Il s'ensuit que

$$\boxed{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ est symplectique si, et seulement si } \det(M) = 1}$$

Q 3. $M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ est orthogonale donc $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 & (1) \\ y_1^2 + y_2^2 = 1 & (2) \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0 & (3) \end{cases}$.

▷ Si M est symplectique, alors avec **Q.2.**, $\det(M) = x_1 y_2 - x_2 y_1 = 1$ (4)

Multiplions (3) par x_1 et (4) par $-x_2$: tenant compte de la relation (1), on obtient : $y_1 = -x_2$.

Multiplions (3) par x_2 et (4) par x_1 : tenant compte de la relation (1), on obtient : $y_2 = x_1$.

D'où $M_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = -J_1 M_1$.

▷ Réciproquement, si $M_2 = -J_1 M_1$, on a $y_1 = -x_2$ et $y_2 = x_1$ donc $\det(M) = x_1^2 + x_2^2 = 1$ et avec **Q.2.**, M est symplectique.

$$\boxed{M \text{ est symplectique si et seulement si } M_2 = -J_1 M_1.}$$

Q 4. Soit $X_1 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de norme 1 : il existe un réel θ tel que $X_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$.

La matrice de colonnes X_1 et $-J_1X_1$ est donc $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

M est une matrice orthogonale de déterminant 1, donc est à la fois orthogonale et symplectique.

$$\boxed{\text{Si } X_1 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ est de norme 1, alors } M = \left(X_1 \vdots -J_1X_1\right) \text{est à la fois orthogonale et symplectique.}}$$

Q 5. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à la fois symétrique et symplectique.

M étant symétrique réelle, le *théorème spectral* assure qu'il existe $P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ et deux réels λ_1 et λ_2 tels que

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^\top.$$

M étant symplectique, $\det(M) = 1$ donc $\lambda_1.\lambda_2 = 1$: les valeurs propres de M sont inverses l'une de l'autre.

De plus, quitte à changer la première colonne de P en son opposée, on peut supposer que P est de déterminant égal à 1, donc que P est symplectique (avec **Q.2.**).

$$\boxed{\text{Si } M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}), \text{ alors il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) \text{ tels que } M = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} P^\top.}$$

Q 6. Soit $A \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$. Il existe un réel a tel que $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$.

Si A est symplectique, alors $\det(A) = 1$ donc $a^2 = 1$, puis $A = J_1$ ou $A = -J_1$.

Réciproquement, J_1 et $-J_1$ sont des matrices à la fois antisymétriques et symplectiques.

$$\boxed{\text{L'ensemble des matrices de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ qui sont à la fois antisymétriques et symplectiques est égal à } \{J_1, -J_1\}}$$

J_1 et $-J_1$ ont pour polynôme caractéristique $X^2 + 1$ qui n'a pas de racine réelle.

En particulier J_1 et $-J_1$ ne sont pas diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

II Cas des matrices symplectiques et orthogonales.

Q 7. Soit $K \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$.

▷ φ est bien une application de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

▷ Soit $Y \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. Soient X_1, X_2 dans $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ et λ_1, λ_2 dans $\mathbb{R}$.

En utilisant la linéarité de $M \mapsto M^\top$ et la bilinéarité du produit matriciel, il vient :

$$\varphi(\lambda_1X_1 + \lambda_2X_2, Y) = (\lambda_1X_1 + \lambda_2X_2)^\top KY = \lambda_1X_1^\top KY + \lambda_1X_1^\top KY = \lambda_1\varphi(X_1, Y) + \lambda_2\varphi(X_2, Y)$$

Cela prouve que pour tout $Y \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, l'application $X \mapsto \varphi(X, Y)$ est linéaire.

On vérifie de la même manière que pour tout $Y \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, l'application $X \mapsto \varphi(Y, X)$ est linéaire.

$$\boxed{\varphi \text{ est une forme bilinéaire sur } \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})}$$

Q 8. Soit $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$.

Vu que $\varphi(X,X) \in \mathbb{R}$, on a : $\varphi(X,X)^\top = \varphi(X,X)$.

D'autre part, $\varphi(X,X)^\top = (X^\top K X)^\top = X^\top K^\top (X^\top)^\top = X^\top(-K)X = -\varphi(X,X)$. D'où $\varphi(X,X) = 0$.

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}),\ \varphi(X,X) = 0}$$

De même, soient $X, Y \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$.

$\varphi(X,Y) = \varphi(X,Y)^\top = (X^\top K Y)^\top = Y^\top K^\top (X^\top)^\top = Y^\top(-K)X = -\varphi(Y,X)$.

$$\boxed{\varphi \text{ est antisymétrique.}}$$

Remarque : *on peut s'interroger sur l'intérêt de cette question...*

On peut aussi remarquer qu'une forme bilinéaire est antisymétrique si, et seulement si elle est alternée.

En effet, soit ψ est une forme bilinéaire sur un espace vectoriel E.

Si $\forall (X,Y) \in E^2, \psi(X,Y) = -\psi(Y,X)$ alors en particulier $\forall X \in E,\ \psi(X,X) = -\psi(X,X)$ donc ψ est alternée.

Réciproquement, supposons ψ alternée et soient X, Y dans E ; en utilisant la bilinéarité de ψ, il vient :

$\psi(X+Y, X+Y) = \psi(X,X) + \psi(X,Y) + \psi(Y,X) + \psi(Y,Y)$ donc, vu que ψ est alternée, $\psi(X,Y) = -\psi(Y,X)$.

Retenons quand-même, ce qui sera utilisé plusieurs fois par la suite, que

$$\boxed{\text{Si } A \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R}), \text{ alors } \forall X, Y \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}), < X, AY >= X^\top AY = - < AX, Y > \text{ et } < AX, X >= 0.}$$

Q 9. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{2n} \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. On calcule $J_n Y = \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{2n} \\ -y_1 \\ \vdots \\ -y_n \end{pmatrix}$, puis

$$\boxed{\varphi(X,Y) =< X, J_n Y >= \sum_{k=1}^{n} (x_k y_{k+n} - x_{n+k} y_k).}$$

Q 10. On notera, pour tous entiers *relatifs* i et j : $\delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Soient $i, j \in \{1, \ldots, 2n\}$. Vu que $e_i = \begin{pmatrix} \delta_{1,i} \\ \delta_{2,i} \\ \vdots \\ \delta_{2n,i} \end{pmatrix}$ et $e_j = \begin{pmatrix} \delta_{1,j} \\ \delta_{2,j} \\ \vdots \\ \delta_{2n,j} \end{pmatrix}$ la question **Q.9.** fournit :

$$\varphi(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{n} (\delta_{k,i}\delta_{k+n,j} - \delta_{n+k,i}\delta_{k,j}) = \sum_{k=1}^{n} (\delta_{k,i}\delta_{k,j-n} - \delta_{k,i-n}\delta_{k,j})$$

Calculons séparément les sommes $\sum_{k=1}^{n} \delta_{k,i}\delta_{k,j-n}$ et $\sum_{k=1}^{n} \delta_{k,i-n}\delta_{k,j}$.

$\triangleright$ Si $i \neq j-n$, alors $\forall k \in \{1,\ldots,n\},\ \delta_{k,i}\delta_{k,j-n} = 0$ donc $\sum_{k=1}^{n} \delta_{k,i}\delta_{k,j-n} = 0$.

$\triangleright$ Si $i = j-n$, alors $\forall k \in \{1,\ldots,n\},\ \delta_{k,i}\delta_{k,j-n} = \delta_{k,i}^2 = \delta_{k,i}$, donc $\sum_{k=1}^{n} \delta_{k,i}\delta_{k,j-n} = 1$.

Ainsi

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{k,i}\delta_{k,j-n} = \delta_{i,j-n} = \delta_{i+n,j}$$

De même, on montre que

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{k,i-n}\delta_{k,j} = \delta_{i-n,j} = \delta_{i,j+n}$$

En définitive :

$$\boxed{\text{Pour tous } i,j \in \{1,\ldots,2n\},\ \ \varphi(e_i,e_j) = \delta_{i+n,j} - \delta_{i,j+n}}$$

Q 11. Soit $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. On a vu en **Q 8.** que $< X, J_nX >= \varphi(X,X) = 0$, donc $J_nX \in X^{\perp}$.

D'autre part, $J_n^{\top} J_n = -J_n^2 = I_{2n}$ (cf **Q 1.**) donc J_n est orthogonale et :

$$\varphi(J_nX, X) = (J_nX)^{\top} J_nX = X^{\top} J_n^{\top} J_n X = X^{\top} X = ||X||^2.$$

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}),\ J_nX \in X^{\perp} \text{ et } \varphi(J_nX,X) = ||X||^2.}$$

Q 12. Soient $X, Z \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$.

Vu que φ est antisymétrique, $\varphi(X,Z) = -\varphi(Z,X) = -< Z, J_nX >$.

Par conséquent, $\varphi(X,Z) = 0$ si, et seulement si Z est orthogonal à J_nX. Autrement dit :

$$\boxed{X^{J_n} = (J_nX)^{\perp}}$$

Q 13. Le système des vecteurs colonnes d'une matrice orthogonale est une famille orthonormée, donc :

$$\boxed{\text{Pour tout } (i,j) \in \{1,\ldots,2n\}^2,\ \|X_i\| = 1 \text{ et } i \neq j \Rightarrow X_i \perp X_j.}$$

Soit $(i,j) \in \{1,\ldots,2n\}^2$. Vu que $X_i = Pe_i$ et $X_j = Pe_j$, il vient :

$$\varphi(X_i, X_j) = \varphi(Pe_i, Pe_j) = e_i^{\top} P^{\top} J_n P e_i.$$

Or P est symplectique donc $P^{\top} J_n P = J_n$, d'où :

$$\boxed{\forall (i,j) \in \{1,\ldots,2n\}^2,\ \varphi(X_i,X_j) = \varphi(e_i,e_j) = \delta_{i+n,j} - \delta_{i,j+n}}$$

Remarque :

Réciproquement, si les colonnes $X_1, \ldots, X_{2n}$ *de* $P \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ *vérifient*

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,2n\}^2, \begin{cases} \|X_i\| = 1 \\ i \neq j \Rightarrow X_i \perp X_j. \\ \varphi(X_i, X_j) = \varphi(e_i, e_j) = \delta_{i+n,j} - \delta_{i,j+n} \end{cases}$$

Alors P *soit orthogonale et par produit par blocs,* $P^\top J_n P = (< X_i, J_n X_j >)_{1 \leq i,j \leq 2n} = (\varphi(X_i, X_j))_{1 \leq i,j \leq 2n} = J_n$*, donc* P *est symplectique.*

Q 14. Soit $i \in \{1,\ldots,n\}$. Soit $Z \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. On décompose Z sur la base orthonormée $(X_1, X_2, \ldots, X_{2n})$:

$$Z = \sum_{j=1}^{2n} z_j X_j \text{ avec, pour tout } j \in \{1,\ldots,2n\},\ z_j =< Z, X_j >$$

On calcule, avec la bilinéarité de φ :

$$\varphi(X_i, Z) = \sum_{j=1}^{2n} z_j \varphi(X_i, X_j) = \sum_{j=1}^{2n} z_j (\delta_{i+n,j} - \delta_{i,j+n})$$

Or $i \in \{1,\ldots,n\}$, donc pour tout $j \in \{1,\ldots,2n\}$, $\delta_{i,j+n} = 0$. Dès lors :

$$\varphi(X_i, Z) = \sum_{j=1}^{2n} z_j \delta_{i+n,j} = z_{i+n} =< Z, X_{i+n} > .$$

Cette dernière égalité prouve que $Z \in X_i^{J_n}$ si, et seulement si Z est orthogonal à X_{i+n} :

$$\boxed{\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ X_i^{J_n} = X_{i+n}^\perp.}$$

Q 15. Soit $i \in \{1,\ldots,n\}$. Les questions **Q 12.** et **Q 14.** montrent que $X_{i+n}^\perp = (J_n X_i)^\perp$.

Or pour tout $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, $(X^\perp)^\perp = (\mathrm{Vect}(X)^\perp)^\perp = \mathrm{Vect}(X)$, donc $\mathrm{Vect}(J_n X_i) = \mathrm{Vect}(X_{i+n})$.

Par conséquent, il existe un réel α tel que $X_{i+n} = \alpha J_n X_i$.

En utilisant la bilinéarité de φ et la question **Q 11.**,

$$\varphi(X_{i+n}, X_i) = \alpha \varphi(J_n X_i, X_i) = \alpha \|X_i\|^2 = \alpha$$

D'autre part, on a vu en **Q 13.** que $\varphi(X_i, X_{i+n}) = \delta_{i+n,i+n} - \delta_{i,i+2n} = 1$, donc vu que φ est antisymétrique,

$$\varphi(X_{i+n}, X_i) = -1$$

En définitive, $X_{i+n} = \alpha J_n X_i$, avec $\alpha = -1$:

$$\boxed{\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ X_{i+n} = -J_n X_i}$$

Remarque :

Réciproquement, une matrice orthogonale dont les colonnes sont de la forme $X_1, .., X_n, -J_nX_1, .., -J_nX_n$ est symplectique.

En effet, une telle matrice P est de la forme $P = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$.

Un calcul par blocs montre que $J_nP = PJ_n$, donc en multipliant à gauche par $P^\top$, et en utilisant que P est orthogonale, il vient $P^\top J_nP = P^\top PJ_n = J_n$.

Cette remarque nous servira à la question **Q 24.**

III Quelques généralités sur les matrices symplectiques.

Q 16. Soit $M \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$. On a donc $M^\top J_nM = J_n$.

Une matrice carrée et sa transposée ayant le même déterminant, il vient :

$$\det(M)^2 \det(J) = \det(J)$$

Or $\det(J_n) \neq 0$ d'après **Q1.** donc $\det(M)^2 = 1$:

$$\boxed{\text{Le déterminant d'une matrice symplectique vaut soit 1 soit -1}}$$

Remarque : *on peut montrer que le déterminant d'une matrice symplectique vaut toujours 1.*

(voir le sujet Mines-Ponts PSI 2015, Maths 1).

Q 17. Soit $M \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$. D'après la question précédente, M est inversible.

En multipliant la relation $M^\top J_nM = J_n$ par M^{-1} à gauche et par $(M^\top)^{-1}$ à droite, on obtient :

$$J_n = (M^\top)^{-1}J_nM^{-1} = (M^{-1})^\top J_nM^{-1}$$

ce qui prouve que M^{-1} est symplectique.

$$\boxed{\text{L'inverse d'une matrice symplectique est encore symplectique}}$$

Q 18. Soient $M, N \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.

$$(MN)^\top J(MN) = N^\top M^\top JMJ = N^\top JN = J$$

$$\boxed{\text{Le produit de deux matrices symplectiques est symplectique.}}$$

Toute matrice symplectique étant inversible, la matrice nulle n'appartient pas à $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$. En particulier :

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})}$$

IV Réduction des matrices symétriques et symplectiques.

Soit $M \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R})$. On a donc $MJ_nM = J_n$.

Q 19. Supposons que λ soit valeur propre de M, et soit $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé.

M est inversible d'après **Q 16.**, donc $\lambda \neq 0$.

$$MJ_nX = MJ_n(\tfrac{1}{\lambda}MX) = \frac{1}{\lambda}MJ_nMX = \frac{1}{\lambda}J_nX.$$

De plus, X est non nul et J_n est inversible, donc $J_nX \neq 0$.

Ainsi J_nX est un vecteur propre de M associé à la valeur propre $\frac{1}{\lambda}$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si X est un vecteur propre de } M \text{ associé à la valeur propre } \lambda, \\ \text{alors } J_nX \text{ est un vecteur propre de } M \text{ associé à la valeur propre } \frac{1}{\lambda}.\end{array}}$$

Q 20. Soit λ une valeur propre de M. La question **Q 19.** permet de définir l'application

$$f_\lambda : \left|\begin{array}{ccc} E_\lambda(M) & \to & E_{1/\lambda}(M) \\ X & \mapsto & J_nX \end{array}\right.$$

▷ f_λ est linéaire

▷ f_λ est injective car J_n est inversible.

▷ Montrons que f_λ est surjective.

Soit $Y \in E_{1/\lambda}(M)$. D'après **Q.1**, $Y = J_nX$ avec $X = -J_nY$.

On a $MX = -MJ_nY = -MJ_n(\lambda MY) = -\lambda J_nY = \lambda X$ donc $X \in E_\lambda(M)$ et $f_\lambda(X) = J_nX = Y$.

On a montré que f_λ est un isomorphisme de $E_\lambda(M)$ sur $E_{1/\lambda}(M)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}E_\lambda(M) \text{ et } E_{1/\lambda}(M) \text{ ont la même dimension.} \\ \text{Plus précisément, si } (X_1, \ldots, X_p) \text{ est une base de } E_\lambda(M), \text{ alors } (J_nX_1, \ldots, J_nX_p) \text{ est une base de } E_{1/\lambda}(M)\end{array}}$$

Remarque : *vu que J_n est une matrice orthogonale, on peut même dire que si $(X_1, \ldots, X_p)$ est une base orthonormée de $E_\lambda(M)$, alors $(J_nX_1, \ldots, J_nX_p)$ est une base orthonormée de $E_{1/\lambda}(M)$.*

Q 21. Soient $Y_1, \ldots, Y_p$ et Y dans $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$.

Supposons que $Y \in (\mathrm{Vect}(Y_1, \ldots, Y_p, J_nY_1, \ldots, J_nY_p))^\perp$.

Soit $i \in \{1, \ldots, p\}$. On a donc $< Y, Y_i >=< Y, J_nY_i >= 0$.

La question **Q 8.** fournit : $< J_nY, Y_i >= - < Y, J_nY_i >= 0$ et $< J_nY, Y >= 0$.

De plus, J_n est une matrice orthogonale, donc $< J_nY, J_nY_i >=< Y, Y_i >= 0$.

Par conséquent, J_nY est orthogonal à tous les vecteurs de la famille $(Y_1, \ldots, Y_p, Y, J_nY_1, \ldots, J_nY_p)$, et donc $J_nY \in (\mathrm{Vect}(Y_1, \ldots, Y_p, Y, J_nY_1, \ldots, J_nY_p))^\perp$.

$$\boxed{\text{Si } Y \in (\mathrm{Vect}(Y_1, \ldots, Y_p, J_nY_1, \ldots, J_nY_p))^\perp, \text{ alors } J_nY \in (\mathrm{Vect}(Y_1, \ldots, Y_p, Y, J_nY_1, \ldots, J_nY_p))^\perp.}$$

Q 22. Le lemme suivant sera utilisé à plusieurs reprises par la suite :

$$\boxed{\textbf{Lemme : } \text{si un sous-espace } F \text{ de } \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}) \text{ est stable par } J_n\text{, alors sa dimension est paire.}}$$

en effet, si F est stable par J_n, l'application $J_F : \left| \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ X & \mapsto & J_n X \end{array} \right.$ est un endomorphisme de F qui vérifie $J_F^2 = -\mathrm{Id}_F$, donc en prenant les déterminants : $\det(J_F)^2 = (-1)^{\dim(F)} \geq 0$.

Supposons que 1 soit valeur propre de M.

La question **Q 20.** montre que $E_1(M)$ est stable par J_n, donc est de dimension paire d'après le lemme.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dim(E_1(M)) = 2p$.

Montrons par récurrence sur $k \in \{1, \ldots, p\}$ la propriété

$$\mathcal{P}_k : \left| \begin{array}{l} \text{« Il existe } X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}) \text{ tels que } (X_1, \ldots, X_k, J_nX_1, \ldots, J_nX_k) \text{ soit} \\ \text{une famille orthonormée de } E_1(M) \text{ »} \end{array} \right.$$

▷ $\mathcal{P}_1$ est vraie : soit X un vecteur de $E_1(M)$ de norme 1. D'après **Q 19.**, J_nX appartient à $E_1(M)$.

J_n est antisymétrique donc $< X, J_nX >= 0$ et J_n est orthogonale, donc $\|J_nX\| = \|X\| = 1$.

Ainsi (X, J_nX) est une famille orthonormée de $E_1(M)$.

▷ Supposons que $\mathcal{P}_k$ soit vraie pour un certain $k \in \{1, \ldots, p-1\}$.

Soient $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ tels que $(X_1, \ldots, X_k, J_nX_1, \ldots, J_nX_k)$ soit une famille orthonormée de $E_1(M)$.
Vu que $2k < 2p$, $(\mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_k, J_nX_1, \ldots, J_nX_k))^\perp$ qui est de dimension $2n - 2k > 2n - 2p$ n'est pas en somme directe avec $E_1(M)$, donc il existe un vecteur X_{k+1} dans $E_1(M)$ de norme 1 tel que

$X_{k+1} \in (\mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_k, J_nX_1, \ldots, J_nX_k))^\perp$.

La question **Q 21.** assure alors que $J_nX_{k+1} \in (\mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_k, X_{k+1}, J_nX_1, \ldots, J_nX_k))^\perp$.

De plus $\|J_nX_{k+1}\| = \|X_{k+1}\| = 1$, donc la famille $(X_1, \ldots, X_k, X_{k+1}, J_nX_1, \ldots, J_nX_k, J_nX_{k+1})$ est une famille orthonormée de $E_1(M)$. D'où $\mathcal{P}_{k+1}$

Par récurrence, $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$ et $\mathcal{P}_p$ fournit le résultat voulu.

$$\boxed{\text{Il existe une base orthonormée de } E_1(M) \text{ de la forme } (X_1, \ldots, X_p, J_nX_1, \ldots, J_nX_p)}$$

Q 23. Un raisonnement en tout point analogue montre que $E_{-1}(M)$ est de dimension paire et qu'il existe une base orthonormée de $E_{-1}(M)$ de la forme $(X_1, \ldots, X_p, J_nX_1, \ldots, J_nX_p)$.

Q 24. Supposons que les valeurs propres distinctes de M soient 1 et -1 et $\lambda_1, \ldots, \lambda_s, 1/\lambda_1, \ldots, 1/\lambda_s$ où $|\lambda_1| < 1, \ldots, |\lambda_s| < 1$.

(le raisonnement s'adapte sans aucune difficulté dans les cas où 1 ou -1 ne sont pas valeurs propres de M ou que M n'a pas de valeur propre de valeur absolue différente de 1).

Pour alléger, on note E_λ au lieu de $E_\lambda(M)$.

Le *théorème spectral* fournit :

$$\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}) = E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_{-1} \overset{\perp}{\oplus} E_{\lambda_1} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} E_{\lambda_r} \overset{\perp}{\oplus} E_{1/\lambda_1} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} E_{1/\lambda_r}$$

Il existe une base orthonormée de E_1 de la forme $(X_1, \ldots, X_p, J_nX_1, \ldots, J_nX_p)$.

La famille $(X_1, \ldots, X_p, -J_nX_1, \ldots, -J_nX_p)$ est encore une base orthonormée de E_1.

De même, il existe une base orthonormée de E_{-1} de la forme $(Y_1, \ldots, Y_q, -J_nY_1, \ldots, -J_nY_q)$.

Prenons enfin $(Z_1, \ldots, Z_r)$ une base orthonormée adaptée à $E_{\lambda_1} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} E_{\lambda_s}$.

D'après la remarque faite à la fin de **Q 20.**, la famille $(-J_nZ_1, \ldots, -J_nZ_r)$ une base orthonormée adaptée à $E_{1/\lambda_1} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} E_{1/\lambda_s}$.

Soit P la matrice dont les colonnes sont (dans cet ordre) :

$$X_1, \ldots, X_p, Y_1, \ldots, Y_q, Z_1, \ldots, Z_r, -J_nX_1, \ldots, -J_nX_p, -J_nY_1, \ldots, -J_nY_q, -J_nZ_1, \ldots, -J_nZ_r$$

Les colonnes de P forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ donc P est orthogonale et la remarque faite à la fin de la partie II montre que P est aussi symplectique.

De plus, par construction de P, la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \ldots, d_{2n}$ où pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $d_{n+k} = 1/d_k$.

la propriété annoncée au début de la partie IV est donc démontrée.

Q 25. Soit $A = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 9 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} B & C \\ C & B \end{pmatrix}$ en posant $B = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

On constate que $A^\top = A$.

D'autre part, notons $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $B = U + 8I_2$ et $C = 3U$ et $U^2 = 2U$.

Donc B et C commutent et $B^2 - C^2 = U^2 + 16U + 64I_2 - 9U^2 = 64I_2$.

En faisant du produit par blocs, on obtient donc :

$$A^\top J_2 A = AJ_2A = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} BC - CB & B^2 - C^2 \\ C^2 - B^2 & BC - CB \end{pmatrix} = J_2$$

$$\boxed{A \text{ est symétrique et symplectique}}$$

Q 26. On reprend le raisonnement de **Q 24.** sur cet exemple.

On observe que $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et que $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Posons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'après **Q 19.**, $-JX_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $-JX_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres 1 et 1/2.

Considérons la matrice :

$$\boxed{P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 & -1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.}$$

P est orthogonale car ses vecteurs colonnes forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et on vérifie que $P^\top J_2 P = J_2$, c'est-à-dire que P est symplectique.

De plus, par la formule du changement de base : $P^\top AP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

V Étude du cas des matrices antisymétriques.

Soit $M \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$. On a donc $MJ_nM = -J_n$. On a déjà observé en **Q 8.** que

$$\boxed{\forall X, Y \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}), < X, MY >= X^\top MY = - < MX, Y > \text{ et } < MX, X >= 0.}$$

Q 27. Raisonnons par l'absurde et supposons que M ait une valeur propre réelle λ.

Vu que M est symplectique, elle est inversible (**Q 16.**) et donc $\lambda \neq 0$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $MX = \lambda X$.

On a $0 =< MX, X >= \lambda \|X\|^2$ avec et X non nuls, ce qui est absurde.

$$\boxed{M \text{ n'a pas de valeur propre réelle}}$$

Q 28. M est antisymétrique donc $(M^2)^\top = M^\top M^\top = (-M)^2 = M^2$ i.e. $M^2 \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R})$.

D'autre part, M^2 est symplectique comme produit de deux matrices symplectiques (**Q 17.**).

Le résultat voulu découle donc de la partie IV.

Soit $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur de norme 1 tel que $M^2X = \lambda X$.

Q 29. ▷ Tout d'abord, les matrices J_n et M étant inversibles, les trois vecteurs MX, J_nX et J_nMX ne sont pas nuls.

▷ $M^2MX = M(\lambda X) = MX$ donc MX est un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ

▷ $M^2J_nX = M^2J_n(\frac{1}{\lambda}M^2X) = \dfrac{1}{\lambda}M^2J_nM^2X = \dfrac{1}{\lambda}J_nX$ car M^2 est symplectique.

▷ $M^2 J_n M X = M^2 J_n M(\frac{1}{\lambda} M^2 X) = \dfrac{1}{\lambda} M^2 J_n M^2 M X = \dfrac{1}{\lambda} J_n M X$

$$\boxed{\text{Si } X \text{ est un vecteur propre de } M^2 \text{ associé à la valeur propre } \lambda, \text{ alors } MX \text{ est un vecteur propre de } M^2 \text{ associé à } \lambda \text{ et } J_nX \text{ et } J_nMX \text{ sont des vecteurs propres de } M^2 \text{ associés à la valeur propre } \dfrac{1}{\lambda}}$$

Q 30. Soit $F = \mathrm{Vect}(X, MX, J_nX, J_nMX)$.

▷ F est stable par M :

en effet, $MX \in F$, $M(MX) = M^2X = \lambda X \in F$,

$M(J_nX) = MJ_n(\frac{1}{\lambda}M^2X) = \frac{1}{\lambda}MJ_nM\,MX = \frac{-1}{\lambda}J_nMX \in F$ et $M(J_nMX) = -J_nX \in F$.

Soit alors $Y \in F$; Y est combinaison linéaire de X, MX, J_nX, J_nMX, donc d'après les calculs ci-dessus, MY est aussi combinaison linéaire de X, MX, J_nX, J_nMX donc appartient à F.

▷ F est stable par J_n :

en effet, $J_nX \in F$, $J_n(MX) = J_nMX \in F$, $J_n(J_nX) = -X \in F$ et $J_n(J_nMX) = -MX \in F$.

On en déduit comme précédemment que F est stable par J_n.

$$\boxed{\text{Si } X \text{ est un vecteur propre de } M^2, \text{ alors } F = \mathrm{Vect}(X, MX, J_nX, J_nMX) \text{ est stable par } M \text{ et par } J_n.}$$

Q 31. Soit λ une valeur propre de M^2. Il existe $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X \neq 0$ et $M^2X = \lambda X$.

Vu que M est antisymétrique, $< M^2X, X >= - < MX, MX >= -\|MX\|^2$.

D'autre part, $< M^2X, X >= \lambda\|X\|^2$.

Vu que X est non nul et M inversible, on a $\|X\|^2 \neq 0$ et $\|MX\|^2 > 0$ donc $\lambda = -\dfrac{\|MX\|^2}{\|X\|^2} < 0$

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } M^2 \text{ sont strictement négatives}}$$

Q 32. Supposons $\lambda \neq -1$, donc $\lambda \neq \dfrac{1}{\lambda}$.

Les espaces propres d'une matrice symétrique réelle étant deux à deux orthogonaux, $E_\lambda(M^2) \perp E_{1/\lambda}(M^2)$.

Observons que $< X, MX >= 0$ car M est antisymétrique.

J_n étant orthogonale, on a alors $< J_nX, J_nMX >=< X, MX >= 0$.

Par conséquent, la question **Q 29.** montre que la famille (X, MX, J_nX, J_nMX) est orthogonale et constituée de vecteurs non nuls, donc est libre. Autrement dit,

$$\boxed{F = \mathrm{Vect}(X, MX, J_nX, J_nMX) \text{ est de dimension 4.}}$$

On vient d'observer que la famille $\left(X, \dfrac{-1}{\sqrt{-\lambda}}MX, -J_nX, \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}}J_nMX\right)$ est orthogonale.

De plus, $\|\dfrac{-1}{\sqrt{-\lambda}}MX\|^2 = \dfrac{1}{-\lambda} < MX, MX >= \dfrac{1}{\lambda} < M^2X, X >= \|X\|^2 = 1$

Enfin, J_n est orthogonale donc $\|J_nX\| = \|X\| = 1$ et $\|\dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}}J_nMX\| = \|\dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}}MX\| = 1$.

$$\boxed{\text{La famille } \left(X, \dfrac{-1}{\sqrt{-\lambda}}MX, -J_nX, \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}}J_nMX\right) \text{ est une base orthonormée de } F}$$

$$\text{Enfin}\ \begin{cases} MX = -\sqrt{-\lambda}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{-\lambda}}MX\right) \\ M\left(\dfrac{-1}{\sqrt{-\lambda}}MX\right) = \dfrac{-\lambda}{\sqrt{-\lambda}}X = \sqrt{-\lambda}X \\ M(-J_nX) = \dfrac{1}{\lambda}J_nMX = \dfrac{-1}{\sqrt{-\lambda}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}}J_nMX\right) \quad \text{en utilisant } \textbf{Q 30.} \\ M\left(\dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}}J_nMX\right) = \dfrac{-1}{\sqrt{-\lambda}}J_nX \end{cases}$$

La matrice de m_F dans la base orthonormée $\left(X, \dfrac{-1}{\sqrt{-\lambda}}MX, -J_nX, \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}}J_nMX\right)$ est donc égale à

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-\lambda} & 0 & 0 \\ -\sqrt{-\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}} \\ 0 & 0 & \dfrac{-1}{\sqrt{-\lambda}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{-\lambda}\,J_1 & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}}\,J_1 \end{pmatrix}}$$

Remarque : Dans la perspective de la question **Q 34.**, traitons le cas où $\lambda = -1$.

Soit X un vecteur unitaire tel que $MX = -X$.

Le sous-espace $F = \text{Vect}(X, MX, J_nX, J_nMX)$ est stable par J_n donc d'après le **lemme** vu en **Q 22.**, la dimension de F est paire.

Vu que X et MX sont orthogonaux et non nuls, la dimension de F est donc égale à 2 ou 4.

▷ Si $\dim(F) = 2$, alors $F = \text{Vect}(X, MX)$, la famille $(X, -MX)$ est une base orthonormée de F et la matrice de m_F dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J_1$.

▷ Si $\dim(F) = 4$, alors $(X, -MX, -J_nX, J_nMX)$ est une base orthonormée de F et la matrice de m_F dans cette base orthonormée est $\begin{pmatrix} J_1 & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & J_1 \end{pmatrix}$

Q 33. Montrons plus généralement que

$$\boxed{\text{Si } A \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R}) \text{ stabilise un sous-espace } V \text{ , alors } A \text{ stabilise aussi } V^{\perp}.}$$

Démonstration : Soit $Y \in V^{\perp}$. Soit $X \in V$. A est antisymétrique, donc $< AY, X >= - < Y, AX >$.

Or A stabilise V donc $AX \in V$ et $< Y, AX >= 0$.

Ainsi AY est orthogonal à tout vecteur X de V c'est-à-dire $AY \in V^{\perp}$.

$$\boxed{\text{Les matrices } M \text{ et } J_n \text{ sont antisymétriques et stabilisent } F\text{, donc elles stabilisent } F^{\perp}}$$

Q 34. • Soit λ une valeur propre de M^2 et X_1 un vecteur de norme 1 tel que $M^2X_1 = \lambda X_1$.

Notons $F_1 = \text{Vect}(X_1, MX_1, J_nX_1, J_nMX_1)$.

On a vu en **Q 32.** et **Q 33.** que F_1 est de dimension 2 ou 4, que F_1 et $F_1^{\perp}$ sont stables par M et J_n et qu'il existe une base orthonormée de F_1 dans laquelle la matrice de m_{F_1} a une des deux formes indiquées.

- $\triangleright$ Si $F_1^\perp = \{0\}$, c'est terminé.

  $\triangleright$ Sinon, $F_1^\perp$ est un sous espace stable par M donc par M^2. L'endomorphisme induit par m^2 sur $F_1^\perp$ est symétrique, donc il existe $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $X_2 \in F_1^\perp$, tels que $M^2X_2 = \lambda_2 X_2$ et $\|X_2\| = 1$.

  Notons $F_2 = \mathrm{Vect}(X_2, MX_2, J_nX_2, J_nMX_2)$.

  Avec **Q 32.** et **Q 33.**, il est immédiat que F_1 et F_2 vérifient les propriétés $(b), (c), (e)$ et (f).

  De plus, F_1 et F_2 sont orthogonaux et si $Y \in F_1, Z \in F_2$, alors $\varphi(Y, Z) =< Y, J_nZ >= 0$ car $J_nZ \in F_2$.

  Donc F_1 et F_2 vérifient (d).

- Supposons avoir construit, pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, des sous-espaces $F_1, \dots, F_k$ deux à deux orthogonaux (donc en somme directe) et vérifiant les propriétés (b) à (f).

  $\triangleright$ Si $F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_k = \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, c'est terminé.

  $\triangleright$ Sinon $G := (F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_k)^\perp$ est un sous-espace stable par M donc par M^2.

  L'endomorphisme induit par m^2 sur G est symétrique, donc il existe $\lambda_{k+1} \in \mathbb{R}$ et $X_{k+1} \in G$, tels que $M^2X_{k+1} = \lambda_{k+1}X_{k+1}$ et $\|X_{k+1}\| = 1$.

  Posons $F_{k+1} = \mathrm{Vect}(X_{k+1}, MX_{k+1}, J_nX_{k+1}, J_nMX_{k+1})$.

  On vérifie comme précédemment que les sous-espaces $F_1, \dots F_k, F_{k+1}$ satisfont aux propriétés (b) à (f).

Vu que $\dim(F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_k) \geq 2k$, ce procédé de construction s'arrête au bout d'au plus n étapes, ce qui prouve le résultat voulu.

Q 35. Soit $B = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Posons $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On calcule $BU = -2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ puis $B^2U = -4U$.

$$\boxed{B^2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

Q 36. On applique **Q 32.** sur cet exemple, avec $\lambda = -4$ et $X = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On calcule donc $\dfrac{-1}{2}BX = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $-J_2X = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\dfrac{1}{2}J_2BX = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Considérons la matrice $P = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

P est orthogonale car ses colonnes forment une base orthonormée.

De plus ses colonnes sont de la forme $X_1, X_2, -J_2X_1, -J_2X_2$ donc P est symplectique (cf remarque à la fin de la partie II).

Enfin, on a vu en **Q 32.** que $P^\top BP = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$

—FIN—