Corrigé de Centrale 2016 PC math 1

I Autour de la fonction Gamma d'Euler

I.A.1) $f(t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ existe si et seulement si $x > 0$.

Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} t^{x+1}\mathrm{e}^{-t} = 0$, $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\frac{1}{t^2})$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ existe pour tout x.

Le domaine de définition de Γ est donc $\mathcal{D} =]0, +\infty[$.

I.A.2) On intègre par parties pour $x > 0$: $\Gamma(x+1) = [-e^{-t}t^x]_0^{+\infty} + x\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = x\Gamma(x)$ puisque l'expression entre crochets a pour limite 0 en 0 et en $+\infty$.

On en déduit par récurrence, pour $n \geqslant 1$ et $x > 0$: $\Gamma(x+n) = \Gamma(x)\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)$.

Pour $x = 1$ on obtient avec $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 1$, $\Gamma(n+1) = n!$ donc $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour $n \geqslant 1$.

I.A.3) Dans la première intégrale on pose $t = u^{1/2}$ (bijection de classe C^1 de $]0, +\infty[$ dans lui-même):
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\frac{1}{2}u^{-1/2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \Gamma(3/2)$.

Dans la seconde intégrale on pose $t = u^{1/4}$ (bijection de classe C^1 de $]0, +\infty[$ dans lui-même):
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^4}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\frac{1}{4}u^{-3/4}\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\Gamma(1/4) = \Gamma(5/4)$.

I.B.1) Pour $t > 0$ fixé et x variant entre a et b, $e^{x\ln t}$ est compris entre $e^{a\ln t}$ et $e^{b\ln t}$ donc $t^x \leqslant \max(t^a, t^b) \leqslant t^a + t^b$.

I.B.2) Pour $x > 0$ et $t > 0$ posons $f(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(x-1)\ln t - t}$. On calcule $\dfrac{\partial f^k}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$.

Pour $x > 0$ fixé: $|(\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}| \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\frac{1}{t^2})$ puisque $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{x+1}(\ln t)^k\mathrm{e}^{-t} = 0$.

D'autre part $|(\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}| \underset{t\to 0}{\sim} |\ln t|^k t^{x/2}\dfrac{1}{t^{1-x/2}} \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}(\frac{1}{t^{1-x/2}})$ qui est intégrable sur $]0,1]$ puisque $x > 0$. On en déduit que $t \mapsto \dfrac{\partial f^k}{\partial x^k}(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On peut maintenant appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral:

- Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$
- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$
- Pour tout $x \in]0, +\infty[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto \dfrac{\partial f^k}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur $]0, +\infty[$
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout segment $[a,b] \subset]0, +\infty[$ il existe φ continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ telle $\left|\dfrac{\partial f^k}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$: en appliquant le I.B.1 on peut prendre $\varphi(t) = \left|\dfrac{\partial f^k}{\partial x^k}(a,t)\right| + \left|\dfrac{\partial f^k}{\partial x^k}(b,t)\right|$.

On en conclut pour $x > 0$: $\Gamma^{(k)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

I.C.1) Puisque $(\ln t)^2 > 0$ pour $t \neq 1$, on a $\Gamma''(x) > 0$ et donc Γ' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Avec $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ on déduit que $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. On peut appliquer le théorème de Rolle à Γ sur $[1,2]$ puisqu'elle est de classe C^1 et que $\Gamma(1) = \Gamma(2)$. On en déduit que Γ' s'annule sur $]1,2[$, une seule fois puisque Γ' est strictement croissante. Il existe un unique ξ tel que $\Gamma'(\xi) = 0$ et sa partie entière est égale à 1.

I.C.2) Pour $0 < x < \xi$, $\Gamma'(x) < 0$ donc Γ est strictement décroissante. Pour $x > \xi$, $\Gamma'(x) > 0$ donc Γ est strictement croissante.

De $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et de $\Gamma(1) = 1$ on déduit par continuité de Γ en 1 que $\Gamma(x) \sim \dfrac{1}{x}$ au voisinage de 0^+ et par suite Γ a pour limite $+\infty$ en 0^+.

Puisque Γ est croissante pour $x > 2$ et que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ on déduit que Γ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

De $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ on déduit $\Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x)$. Par continuité de Γ' en 1 et avec l'équivalent obtenu pour $\Gamma(x)$ en 0^+ on déduit que $\Gamma'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\dfrac{1}{x^2}$, donc Γ' a pour limite $-\infty$ en 0^+.

Pour $x > \xi$ on a $\Gamma'(x) > 0$ et par suite $\Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x) > \Gamma(x)$: on en déduit que Γ' a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

La courbe représentative de Γ a pour asymptote la droite d'équation $x = 0$. Quand x tend vers $+\infty$ la croissance vers $+\infty$ est très rapide puisque $n!$ croît très vite vers $+\infty$.

II Une transformée de Fourier

II.A Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$ posons $g(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{-3/4}\mathrm{e}^{ixt}$. On calcule $\dfrac{\partial g^k}{\partial x^k}(x,t) = (it)^k \mathrm{e}^{-t}t^{-3/4}\mathrm{e}^{ixt}$.

Pour x fixé et $k \in \mathbb{N}$, $t \mapsto \left|\dfrac{\partial g^k}{\partial x^k}(x,t)\right| = \mathrm{e}^{-t}t^{k-3/4}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ puisque $\Gamma(k+1/4)$ existe.

On peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral en dominant la dérivée k-ième par $\varphi(t) = \mathrm{e}^{-t}t^{k-3/4}$. F est donc de classe C^∞ et $F^{(k)}(x) = i^k \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{k-3/4}\mathrm{e}^{ixt}\mathrm{d}t$.

$F(0) = \Gamma(1/4)$.

II.B.1) En utilisant le développement en série entière de e^{itx} on obtient: $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{-3/4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ixt)^n}{n!}\mathrm{d}t$.

Appliquons le théorème d'intégration terme à terme pour la série de fonction $(\sum f_n)$ définie par $f_n(t) = \mathrm{e}^{-t}t^{-3/4}\dfrac{(ixt)^n}{n!}$ (x étant fixé):

- f_n est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ puisque $|f_n(t)| = \dfrac{|x|^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}t^{n-3/4}$ et que $\Gamma(n+1/4)$ existe.
- La série $(\sum f_n)$ converge pour tout $t > 0$.
- Si on choisit $|x| < 1$, la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\mathrm{d}t$ converge.

  En effet, $u_n = \dfrac{|x|^n}{n!}\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{n-3/4}\mathrm{d}t = \dfrac{|x|^n}{n!}\Gamma(n+1/4)$. Pour $n \geqslant 2$, par croissance de la fonction Γ, on obtient $u_n \leqslant \dfrac{|x|^n}{n!}\Gamma(n+1) = |x|^n$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente.

On obtient donc pour $|x| < 1$ en intégrant terme à terme: $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(ix)^n}{n!}$ avec $c_n = \Gamma(n+1/4)$.

Avec le résultat du I.A.2) on déduit: $c_n = c_0\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(k+1/4)$ avec $c_0 = \Gamma(1/4)$.

La croissance de la fonction Γ pour $x \geqslant n > 2$ entraîne que $\Gamma(n)\dfrac{|x|^n}{n!} \leqslant \left|c_n\dfrac{(ix)^n}{n!}\right| \leqslant \Gamma(n+1)\dfrac{|x|^n}{n!}$ et par suite $\dfrac{|x|^n}{n} \leqslant \left|c_n\dfrac{(ix)^n}{n!}\right| \leqslant |x|^n$. On en déduit que le rayon de convergence est égal à 1.

II.B.2) L'inégalité que l'on vient de montrer entraîne qu'il n'y a pas convergence absolue pour $|x| = 1$ puisque la série $(\sum \frac{1}{n})$ diverge.

II.B.3) Le développement en série entière de $F(x)$ donne son développement limité en 0 à l'ordre 3:
$F(x) = c_0 + c_1 ix + c_2(\frac{-x^2}{2}) + c_3(\frac{-ix^3}{6}) + \mathrm{o}(x^3)$.
On en déduit avec $c_1 = \frac{1}{4}c_0$, $c_2 = \frac{5}{16}c_0$ et $c_3 = \frac{45}{64}c_0$:
$R(x) = c_0(1 - \frac{5}{32}x^2) + \mathrm{o}(x^3)$ et $I(x) = c_0(\frac{x}{4} - \frac{15}{128}x^3) + \mathrm{o}(x^4)$ (on obtient l'ordre 4 pour $I(x)$ puisque c'est une fonction impaire).

II.C.1) Intégrons par parties: $F'(x) = i\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{1/4}\mathrm{e}^{(ix-1)t}\mathrm{d}t = \left[it^{1/4}\frac{\mathrm{e}^{(ix-1)t}}{(ix-1)}\right]_0^{+\infty} - \frac{i}{4(ix-1)}\int_0^{+\infty} t^{-3/4}\mathrm{e}^{(ix-1)t}\mathrm{d}t = -\dfrac{i}{4(ix-1)}F(x)$ puisque les limites en 0 et en $+\infty$ de l'expression entre crochets sont nulles. On a donc bien $F' + AF = 0$ en posant $A(x) = \dfrac{i}{4(ix-1)} = \dfrac{1}{4(x+i)}$.

II.C.2) On obtient $A(x) = \dfrac{x-i}{4(x^2+1)}$ dont une primitive est $G(x) = \dfrac{1}{8}\ln(1+x^2) - \dfrac{i}{4}\arctan x$.

On en déduit que $(F\mathrm{e}^G)' = (F' + FG')\mathrm{e}^G = 0$ d'où $F(x) = Ce^{-G(x)}$ avec $C = F(0) = \Gamma(1/4)$.

On obtient donc $F(x) = \Gamma(1/4)(1+x^2)^{-1/8}\mathrm{e}^{\frac{i}{4}\arctan x}$.

III Autour de la loi de Poisson

III.A.1) $G_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$.

III.A.2) $\mathrm{E}(X) = G'_X(1) = \lambda$.

$\mathrm{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.

III.A.3) Puisque X et Y sont indépendantes on a $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = \mathrm{e}^{(\lambda+\mu)(t-1)}$ donc $X+Y$ a pour loi $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

III.B.1) On montre par récurrence que S_n a pour loi $\mathcal{P}(n\lambda)$.

C'est vrai pour $n = 1$ puisque $S_1 = X_1$.

Supposons, pour un entier n, que S_n a pour loi $\mathcal{P}(n\lambda)$. $S_n = X_1 + ... + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes donc le III.A.3) montre que $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ a pour loi $\mathcal{P}(n\lambda + \lambda) = \mathcal{P}((n+1)\lambda)$.

Le résultat est donc vrai pour tout $n \geqslant 1$.

III.B.2) $\mathrm{E}(S_n) = n\lambda$ et $\sigma(S_n) = \sqrt{n\lambda}$.

$\mathrm{E}(T_n) = \dfrac{1}{\sqrt{n\lambda}}(n\lambda - n\lambda) = 0$.

$\sigma(T_n) = \dfrac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sigma(S_n - \lambda) = 1$.

III.B.3) Puisque T_n possède une variance on peut lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev:

$\mathrm{P}(|T_n - \mathrm{E}(T_n)| \geqslant c) \leqslant \dfrac{\mathrm{V}(T_n)}{c^2}$ donc $\mathrm{P}(|T_n| \geqslant c) \leqslant \dfrac{1}{c^2}$. En choisissant $c \geqslant c(\varepsilon) = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ on obtient $\mathrm{P}(|T_n| \geqslant c) \leqslant \varepsilon$.

III.C.1) $f'(x) = -x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$ et $f''(x) = (x^2-1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$. Pour $x \geqslant 0$, $f'(x) \leqslant 0$ et f' possède un minimum égal à $f'(1) = -\mathrm{e}^{-1/2}$. Puisque f' est impaire on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|f'(x)| \leqslant M = \mathrm{e}^{-1/2}$. Cela entraîne que f est M-lipschitzienne.

III.C.2) a) Pour x fixé posons $g(h) = hf(x) - \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$. $|g'(h)| = |f(x) - f(x+h)| \leqslant Mh$ pour $h > 0$. On en déduit $|g(h)| = |g(h) - g(0)| = \left|\displaystyle\int_0^h g'(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^h |g'(t)|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^h Mt\mathrm{d}t = M\frac{h^2}{2}$.

b) $\left|\dfrac{1}{\sqrt{n\lambda}}\displaystyle\sum_{k\in I_n} f(x_{k,n}) - \int_{x_{p,n}}^{x_{q+1,n}} f(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\sum_{k=p}^{q}\left(\frac{f(x_{k,n})}{\sqrt{n\lambda}} - \int_{x_{k,n}}^{x_{k+1,n}} f(t)\mathrm{d}t\right)\right| \leqslant \sum_{k=p}^{q} M\frac{1}{2\lambda n} = \frac{M(q+1-p)}{2\lambda n}$ en appliquant le a) pour $x = x_{k,n}$ et $h = \dfrac{1}{\sqrt{n\lambda}}$ (car $x_{k+1,n} = x_{k,n} + h$).

c) D'une part on a $p - 1 < n\lambda + a\sqrt{n\lambda} \leqslant p$ donc $a \leqslant x_{p,n} < a + \dfrac{1}{\sqrt{n\lambda}}$. Par suite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_{p,n} = a$.

De même, $q \leqslant n\lambda + b\sqrt{n\lambda} < q+1$ donc $b - \dfrac{1}{\sqrt{n\lambda}} < x_{q,n} \leqslant b$. Par suite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_{q,n} = b$.

On en déduit puisque f est continue: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{x_{p,n}}^{x_{q+1,n}} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

D'autre part $0 \leqslant q - p \leqslant (b-a)\sqrt{n\lambda}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{M(q+1-p)}{2\lambda n} = 0$. On en déduit avec le b):

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\in I_n} f(x_{k,n}) = \lim_{n\to+\infty}\int_{x_{p,n}}^{x_{q+1,n}} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

III.C.3) a) Par définition, $x_{k,n}\sqrt{n\lambda} = k - n\lambda$ donc $y_{k,n} = \left(\dfrac{n\lambda}{k}\right)^k \mathrm{e}^{k-n\lambda}$.

On en déduit $\dfrac{\sqrt{2\pi n\lambda}}{y_{k,n}}\mathrm{e}^{-n\lambda}\dfrac{(n\lambda)^k}{k!} = \dfrac{\sqrt{2\pi n\lambda}k^k}{\mathrm{e}^k k!} = \dfrac{\sqrt{2\pi k}k^k}{\mathrm{e}^k k!}\sqrt{\dfrac{n\lambda}{k}}$.

Puisque $k \in I_n$, on a $1+\dfrac{a}{\sqrt{n\lambda}} \leqslant \dfrac{k}{n\lambda} \leqslant 1+\dfrac{b}{\sqrt{n\lambda}}$ donc $\dfrac{k}{n\lambda}$ a pour limite 1 quand n tend vers $+\infty$. Cela entraîne que k tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

D'autre part l'équivalent de Stirling entraîne que $\dfrac{\sqrt{2\pi k}k^k}{\mathrm{e}^k k!}$ tend vers 1 quand k tend vers $+\infty$. Par suite, $\dfrac{\sqrt{2\pi n\lambda}}{y_{k,n}}\mathrm{e}^{-n\lambda}\dfrac{(n\lambda)^k}{k!}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Il est donc compris entre $1-\varepsilon$ et $1+\varepsilon$ pour $n \geqslant N_1(\varepsilon)$ ce qui démontre le résultat demandé.

b) Pour $k \in I_n$ on a $a \leqslant x_{k,n} \leqslant b$ donc $x_{k,n}$ est borné. De plus on a montré que $\dfrac{k}{n\lambda}$ a pour limite 1 quand n tend vers $+\infty$ donc $\dfrac{x_{k,n}}{k}\sqrt{n\lambda} = x_{k,n}\dfrac{n\lambda}{k}\dfrac{1}{\sqrt{n\lambda}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

On peut donc utiliser le développement limité $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \mathrm{o}(t^2)$ avec $t = \dfrac{x_{k,n}}{k}\sqrt{n\lambda}$. On obtient:

$$\begin{aligned}
\ln(y_{k,n}) - \ln f(x_{k,n}) &= k\ln(1-\frac{x_{k,n}}{k}\sqrt{n\lambda}) + x_{k,n}\sqrt{n\lambda} + \frac{1}{2}x_{k,n}^2 \\
&= k\left(-\frac{x_{k,n}}{k}\sqrt{n\lambda} - \frac{1}{2}(\frac{x_{k,n}}{k}\sqrt{n\lambda})^2 + \mathrm{o}((\frac{x_{k,n}}{k}\sqrt{n\lambda})^2)\right) + x_{k,n}\sqrt{n\lambda} + \frac{1}{2}x_{k,n}^2 \\
&= \frac{1}{2}x_{k,n}^2\left(1-\frac{n\lambda}{k} + \mathrm{o}(\frac{n\lambda}{k})\right).
\end{aligned}$$

Cette expression a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$ puisque $x_{k,n}$ est borné et $\dfrac{k}{n\lambda}$ a pour limite 1.

On en déduit que $\dfrac{y_{k,n}}{f(x_{k,n})}$ a pour limite 1 et on obtient l'inégalité demandée pour $n \geqslant N_2(\varepsilon)$.

III.C.4) On déduit de la question précédente que:

$$\frac{(1-\varepsilon)^2}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\in I_n} f(x_{k,n}) \leqslant \sum_{k\in I_n}\frac{(n\lambda)^k}{k!}\mathrm{e}^{-n\lambda} \leqslant \frac{(1+\varepsilon)^2}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\in I_n} f(x_{k,n}).$$

Avec le III.C.2)c) on déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k\in I_n}\frac{(n\lambda)^k}{k!}\mathrm{e}^{-n\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

III.C.5) $\mathrm{P}(a \leqslant T_n \leqslant b) = \mathrm{P}(n\lambda + a\sqrt{n\lambda} \leqslant S_n \leqslant n\lambda + b\sqrt{n\lambda}) = \displaystyle\sum_{k\in I_n}\mathrm{P}(S_n = k)$ puisque S_n ne prend que des valeurs entières.

III.C.6) Puisque S_n a pour loi $\mathcal{P}(n\lambda)$, $\mathrm{P}(a \leqslant T_n \leqslant b) = \displaystyle\sum_{k\in I_n}\frac{(n\lambda)^k}{k!}\mathrm{e}^{-n\lambda}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(a \leqslant T_n \leqslant b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Pour $c > a$ on a $\mathrm{P}(T_n \geqslant a) = \mathrm{P}(a \leqslant T_n \leqslant c) + \mathrm{P}(T_n > c)$. Soit $\varepsilon > 0$. Avec la question III.B.3) on peut choisir c_1 tel que pour $c > c_1$ on ait $\mathrm{P}(T_n > c) \leqslant \mathrm{P}(|T_n| \geqslant c) \leqslant \varepsilon$. D'autre part, puisque $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\frac{1}{x^2})$, f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc on peut choisir c_2 tel que pour $c > c_2$ on ait $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^c f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon$.

Pour $c > \max(c_1, c_2)$ on a $\displaystyle\left|\mathrm{P}(T_n \geqslant a) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant 2\varepsilon + |\mathrm{P}(a \leqslant T_n \leqslant c) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x| \leqslant 3\varepsilon$ pour $n \geqslant n_0$. Par suite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(T_n \geqslant a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathrm{P}(T_n = a) \leqslant \mathrm{P}(a \leqslant T_n \leqslant a+\varepsilon)$ qui tend vers $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^{a+\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$ quand n tend vers $+\infty$. Comme cette intégrale peut être arbitrairement proche de 0, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(T_n = a) = 0$.

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(T_n > a) = \lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(T_n \geqslant a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(T_n \leqslant b) = 1 - \lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(T_n > b) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

III.D.1) Avec le III.B.3) on a pour $b \leqslant -c(\varepsilon)$: $\mathrm{P}(T_n \leqslant b) \leqslant \mathrm{P}(T_n \geqslant |b|) \leqslant \varepsilon$. On en déduit avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(T_n \leqslant b) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$.

III.D.2) $e^{-n\lambda}A_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n\lambda \rfloor} P(S_n = k) = P(S_n \leqslant n\lambda)$ puisque S_n ne prend que des valeurs entières.

On a donc $e^{-n\lambda}A_n = P(T_n \leqslant 0)$ qui tend vers $1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$ par parité de la fonction f.

On a donc $A_n \sim \frac{1}{2}e^{n\lambda}$.

$e^{-n\lambda}(A_n + B_n) = 1 + e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^k}{k!}$ avec $k = \lfloor n\lambda \rfloor$. Comme $k \leqslant n\lambda < k+1$ on a:

$e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^k}{k!} \leqslant e^{-k}\frac{(k+1)^k}{k!} \sim (1+\frac{1}{k})^k \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}$ qui tend vers 0 puisque k tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et $(1+\frac{1}{k})^k$ a pour limite e. Par suite $B_n \sim \frac{1}{2}e^{n\lambda}$.

III.D.3) $e^{-n\lambda}C_n = \sum_{k=0}^{n} P(S_n = k) = P(S_n \leqslant n) = P(T_n \leqslant \frac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{n})$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe b tel que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{b} f(x)dx \geqslant 1-\varepsilon$. Puisque $1-\lambda > 0$, on a $\frac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{n} \geqslant b$ pour $n \geqslant n_1$.

On a alors $e^{-n\lambda}C_n \geqslant P(T_n \leqslant b)$ qui tend vers $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{b} f(x)dx \geqslant 1-\varepsilon$. On en déduit, puisque que $e^{-n\lambda}C_n \leqslant 1$ (c'est une probabilité), que $e^{-n\lambda}C_n$ a pour limite 1 si $\lambda < 1$.

$e^{-n\lambda}D_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(S_n = k) = P(S_n > n) = P(T_n > \frac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{n})$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a < 0$ tel que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^{\infty} f(x)dx \geqslant 1-\varepsilon$. Puisque $1-\lambda < 0$, on a $\frac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{n} \leqslant a$ pour $n \geqslant n_2$. On a alors $e^{-n\lambda}D_n \geqslant P(T_n > a)$ qui tend vers $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^{\infty} f(x)dx \geqslant 1-\varepsilon$. On en déduit, puisque que $e^{-n\lambda}D_n \leqslant 1$ (c'est une probabilité), que $e^{-n\lambda}D_n$ a pour limite 1 si $\lambda > 1$.

III.E.1) $(n\lambda)^{-n}\int_0^{n\lambda}(n\lambda - t)^n e^t dt = \int_0^{n\lambda}\left(1 - \frac{t}{n\lambda}\right)^n e^t dt$.

Définissons $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n\lambda}\right)^n e^t$ si $t < n\lambda$ et $f_n(t) = 0$ si $t \geqslant n\lambda$ et utilisons le théorème de convergence dominée pour calculer la limite de $\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$.

Chaque fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ (la limite à gauche en $t = n\lambda$ de $f_n(t)$ est égale à 0).

Pour $n > t$ on a $f_n(t) = e^{t + n\ln(1 - \frac{t}{n\lambda})}$ qui a pour limite $f(t) = e^{t(1-\frac{1}{\lambda})}$ quand n tend vers $+\infty$, puisque $n\ln(1-\frac{t}{n\lambda}) \sim -\frac{t}{\lambda}$. La suite (f_n) converge donc simplement vers la fonction f qui est continue sur $\mathbb{R}^+$.

La majoration connue $\ln(1+x) \leqslant x$ entraîne pour $t < n\lambda$ que $f_n(t) \leqslant e^{t(1-\frac{1}{\lambda})} = f(t)$. C'est aussi vérifié pour $t \geqslant n\lambda$ puisque $f_n(t) = 0$. La fonction f est intégrable sur $[0, +\infty[$ puisque $1 - \frac{1}{\lambda} < 0$.

Le théorème de convergence dominée s'applique et donc:

$$\lim_{n\to+\infty}\left((n\lambda)^{-n}\int_0^{n\lambda}(n\lambda - t)^n e^t dt\right) = \int_0^{+\infty} f(t)dt = \left[\frac{e^{t(1-\frac{1}{\lambda})}}{(1-\frac{1}{\lambda})}\right]_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

III.E.2) Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n pour la fonction exp sur l'intervalle $[0, n\lambda]$:

$e^{n\lambda} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(n\lambda)^k}{k!} + \int_0^{n\lambda}\frac{(n\lambda - t)^n}{n!}e^t dt$. On en déduit avec le résultat du III.E.1):

$D_n = e^{n\lambda} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(n\lambda)^k}{k!} = \int_0^{n\lambda}\frac{(n\lambda-t)^n}{n!}e^t dt \sim \frac{\lambda}{1-\lambda}\frac{(n\lambda)^n}{n!}$ quand $\lambda < 1$.

III.F Intégrons par parties: $\int_{-\infty}^{0}\frac{(r-t)^n}{n!}e^t dt = \left[\frac{(r-t)^n}{n!}e^t\right]_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0}\frac{(r-t)^{n-1}}{(n-1)!}e^t dt$. C'est légitime: les intégrales existent car $(r-t)^n e^t = o(\frac{1}{t^2})$ en $-\infty$ et l'expression entre crochets a une limite en 0 et en $-\infty$. On obtient $\int_{-\infty}^{0}\frac{(r-t)^n}{n!}e^t dt = \frac{r^n}{n!} + \int_{-\infty}^{0}\frac{(r-t)^{n-1}}{(n-1)!}e^t dt$. On continue à intégrer par parties et on montre par récurrence sur k que:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{(r-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \mathrm{d}t = \frac{r^n}{n!} + ... + \frac{r^{n-k+1}}{(n-k+1)!} + \int_{-\infty}^{0} \frac{(r-t)^{n-k}}{(n-k)!} \mathrm{e}^t \mathrm{d}t.$$

On obtient finalement pour $k = n$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{(r-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \mathrm{d}t = \frac{r^n}{n!} + ... + \frac{r^1}{1!} + \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^t \mathrm{d}t$ qui est égal à C_n si on choisit $r = n\lambda$.

On a donc $C_n = \dfrac{(n\lambda)^n}{n!} \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \left(1 - \frac{t}{n\lambda}\right)^n \mathrm{e}^t \mathrm{d}t$.

Appliquons à nouveau le théorème de convergence dominée pour calculer la limite de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} g_n(t)\mathrm{d}t$ avec $g_n(t) = \left(1 - \dfrac{t}{n\lambda}\right)^n \mathrm{e}^t$:

Chaque fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}^-$.

Puisque $t \leqslant 0$ on peut écrire $g_n(t) = \mathrm{e}^{t + n\ln(1 - \frac{t}{n\lambda})}$ qui a pour limite $f(t) = \mathrm{e}^{t(1-\frac{1}{\lambda})}$ quand n tend vers $+\infty$ (comme à la question III.E.1) avec f qui est continue sur $\mathbb{R}^-$.

La majoration connue $\ln(1+x) \leqslant x$ entraîne que $g_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{t(1-\frac{1}{\lambda})} = f(t)$. La fonction f est intégrable sur $]-\infty, 0]$ puisque $1 - \frac{1}{\lambda} > 0$.

Le théorème de convergence dominée s'applique et donc:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{0} g_n(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{t(1-\frac{1}{\lambda})}}{(1-\frac{1}{\lambda})}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

On en déduit que $C_n \sim \dfrac{\lambda}{\lambda - 1} \dfrac{(n\lambda)^n}{n!}$ quand $\lambda > 1$.