

Corrigé Centrale PC 2: Fonctions tests et distributions

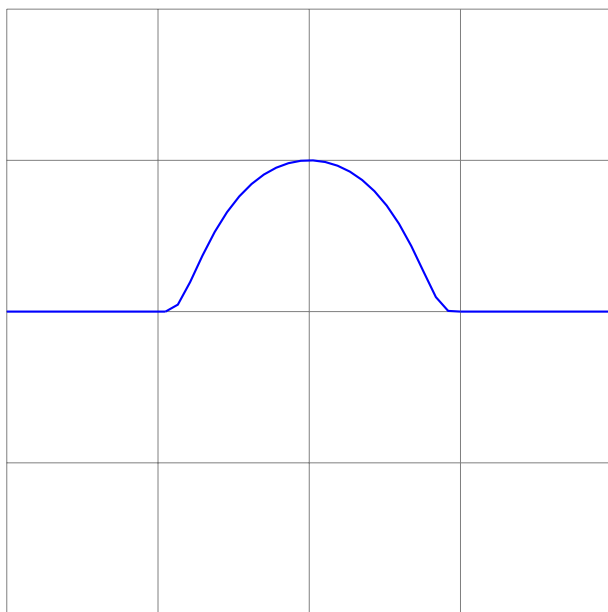
Gilbert Primet
Relu par Denis Lepelletier

20 juin 2015

I. Étude de nouveaux espaces fonctionnels

1.A.1)

- a) φ est définie sur \mathbb{R} , paire, et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. De plus $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = 0 = \varphi(0)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x^2}{1-x^2} = -\infty$ donc par composition $\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = 0$. φ est donc continue en 1 et par parité φ est continue en -1 . φ est donc décroissante sur $[0, 1]$ de 1 à 0, et constante nulle sur $[1, +\infty[$. De même φ est constante sur $]-\infty, -1]$ et croissante sur $-1, 0]$ de 0 à 1.



b)

- c) φ est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et :

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \varphi'(x) = \frac{-2x}{(1-x^2)^2} \varphi(x), \quad \forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\quad \varphi'(x) = 0.$$

On a $\varphi'(x) \sim_{x \rightarrow 1^-} e\left(\frac{-2}{2(1-x^2)^2} \exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right)\right)$. En posant $u = \frac{-1}{1-x^2}$, on a $\lim_{x \rightarrow 1^-} u = -\infty$ et $\lim_{u \rightarrow -\infty} u e^{-u} = 0$. Donc par composition des limites, on obtient $\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi'(x) = 0$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 0$. Comme f est continue en 1, on obtient que f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$. Par parité φ' est dérivable en -1 et $\varphi'(-1) = 0$.

Montrons par récurrence que φ est dérivable à tout ordre n sur $]-1, 1[$ et qu'il existe un polynôme P_n tel que $\forall x \in]-1, 1[$, $\varphi^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{2n}} \varphi(x)$. C'est vrai à l'ordre 0 avec $P_0 = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie à l'ordre n . Alors, d'après les théorèmes usuels, φ est dérivable à l'ordre $n+1$ sur $]-1, 1[$ et

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \varphi^{(n+1)}(x) = \frac{((4n-2) - 4nx^2)xP_n'(x) + (1-x^2)^2 P_n''(x)}{(1-x^2)^{2(n+1)}} \varphi(x)$$

Si l'on pose $P_{n+1}(x) = [(4n-2) - 4nx^2]xP_n(x) + (1-x^2)^2P_n'(x)$, alors P_{n+1} est un polynôme, ce qui termine la récurrence.

φ est donc de classe C^∞ sur $] -1, 1[$. De même φ est de classe C^∞ sur $] -\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$ et ses dérivées successives sont nulles sur ces intervalles.

On pose alors $u = \frac{-1}{1-x^2}$ et on a $\lim_{x \rightarrow 1^-} u = -\infty$ et $\lim_{u \rightarrow -\infty} u^n e^{-u} = 0$, ce qui prouve que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi^{(n)}(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -1^+} \varphi^{(n)}(x).$$

On a évidemment

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi^{(n)}(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -1^-} \varphi^{(n)}(x),$$

et donc, en appliquant successivement le théorème de la limite de la dérivée, aux dérivées successives de φ , on voit que φ est dérivable à tout ordre n en -1 et 1 , que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \varphi^{(n)}(1) = \varphi^{(n)}(-1) = 0,$$

et que $\varphi^{(n)}$ est continue en 1 et -1 . Donc φ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

d) \mathcal{D} est inclus dans l'espace vectoriel $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Il contient la fonction nulle. De plus, si φ_1 et φ_2 sont des éléments de \mathcal{D} et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors, il existe des réels a, b, c, d (avec $a < b$ et $c < d$) tels que φ_1 est nulle en dehors de $[a, b]$ et φ_2 est nulle en dehors de $[c, d]$. On en déduit alors que $\lambda\varphi_1 + \varphi_2$ est nulle en dehors de $[\min(a, c), \max(b, d)]$. De plus $\lambda\varphi_1 + \varphi_2$ est de classe C^∞ . Donc $\lambda\varphi_1 + \varphi_2 \in \mathcal{D}$. Par conséquent, \mathcal{D} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et donc c'est un \mathbb{R} espace vectoriel. Cet espace vectoriel est non réduit à $\{0\}$ puisqu'il contient la fonction φ précédente.

I.A.2) Si $f \in \mathcal{D}$, alors, f est de classe C^∞ et il existe deux réels a et b avec $a < b$ telle que f est nulle en dehors de $[a, b]$. On en déduit que f' est de classe C^∞ et nulle en dehors de $[a, b]$ donc $f' \in \mathcal{D}$.

I.A.3)

a) $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt = \int_{-1}^1 \varphi(t) dt$. φ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[-1, 1]$, donc

$$\int_{-1}^1 \varphi(t) dt > 0$$

b) Comme φ est intégrable sur \mathbb{R} , θ est intégrable sur \mathbb{R} et $\int_{\mathbb{R}} \theta = \frac{\int_{\mathbb{R}} \varphi}{\int_{\mathbb{R}} \varphi} = 1$. L'application $u \mapsto nu$ est une bijection de classe C^1 sur \mathbb{R} sur lui-même, donc en posant $x = nu$, $dx = ndu$, on obtient $\int_{\mathbb{R}} \theta(x) dx = 1 = \int_{\mathbb{R}} n\theta(nu) du$ et la deuxième intégrale converge. On obtient donc bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \int_{\mathbb{R}} \rho_n(x) dx = 1$$

I.A.4) ρ_n est nulle en dehors de l'intervalle $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, donc pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t)\rho_n(x-t)$ est définie, continue par morceaux, et nulle pour $x-t > \frac{1}{n}$ ou $x-t < -\frac{1}{n}$, soit $t > x + \frac{1}{n}$ ou $t < x - \frac{1}{n}$, donc nulle en dehors de l'intervalle $[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$. Donc $t \mapsto f(t)\rho_n(x-t)$ est intégrable sur \mathbb{R} et $f * \rho_n(x)$ est donc bien défini pour tout x réel.

Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $x \mapsto f(t)\rho_n(x-t)$ est de classe C^∞ et :

$$\forall k \in \mathbb{N} \frac{\partial^k (f(t)\rho_n(x-t))}{\partial x^k} (x, t) = f(t)\rho_n^{(k)}(x-t).$$

De plus, la fonction $\rho_n^{(k)}$, nulle en dehors d'un segment où elle est continue, est bornée sur \mathbb{R} . Soit $M_k = \sup_{\mathbb{R}} |\rho_n^{(k)}|$. Si $x \in [a, b]$, alors $t\rho_n^{(k)}(x-t)$ est nulle en dehors de $[a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}]$.

Or f , continue par morceaux, est bornée sur $[a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}]$. En conclusion, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k(f(t)\rho_n(x-t))}{\partial x^k}(x, t)$ est nulle en dehors d'un certain intervalle indépendant de $x \in [a, b]$, où elle est bornée indépendamment de x . On a donc à la fois l'intégrabilité de cette fonction et une condition de domination sur tout segment $[a, b]$. $f * \rho_n$ est donc dérivable à tout ordre (donc de classe C^∞ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, (f * \rho_n)^{(k)} = f * (\rho_n^{(k)}).$$

1.A.5

a) $I_n(x) = \int_{-1}^1 \rho_n(x-t)dt = \int_{-1}^1 n\theta(n(x-t))dt = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt} \int_{-1}^1 n\varphi(n(x-t))dt$ On pose $u = n(x-t)$, $du = -ndt$ et

$$I_n(x) = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt} \int_{n(x-1)}^{n(x+1)} \varphi(u)du$$

En particulier, pour tout x réel, on a $I_n(-x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\rho_n(-x-t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\rho_n(x+t)dt$. On pose alors $u = g(t) = -t$ et l'on obtient $I_n(-x) = \int_{\mathbb{R}} f(-u)\rho_n(x-u)du = \int_{\mathbb{R}} f(u)\rho_n(u-x)du = I_n(x)$. (Compte-tenu de la parité de f et de ρ_n).

b) Si $x + \frac{1}{n} \leq -1$ ou $x - \frac{1}{n} \geq 1$, c'est à dire $x \geq 1 + \frac{1}{n}$ ou $x \leq -1 - \frac{1}{n}$ alors $I_n(x) = 0$. D'autre part I_n est de classe C^∞ . On a donc bien $I_n \in \mathcal{D}$. Pour tout x réel, $I_n'(x) = \frac{n}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt} (\varphi(n(x+1)) - \varphi(n(x-1)))$ d'après l'expression trouvée en a). (Intégrale fonction des ses bornes.) Il faut donc étudier les signes de $(\varphi(n(x+1)) - \varphi(n(x-1))) = u(x)$. (Puisque φ est paire. Cette expression est *impaire* en x , il suffit donc d'étudier le signe sur $[0, +\infty[$. Pour $x \geq 0$, on a $n(x+1) > 1$ donc $\varphi(n(x+1)) = 0$. Donc $u(x) = -\varphi(n(x-1)) = -\varphi(n(1-x))$. Si $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$, alors $n(1-x) \geq 1$ donc $\varphi(n(1-x)) = 0$. Si $x \in]1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$, alors $n(1 - \frac{1}{n}) \in]-1, 1[$, donc $u(x) < 0$. Enfin, si $x \geq 1 + \frac{1}{n}$, alors $n(x-1) \geq 1$ donc $u(x) = 0$.

En conclusion pour $n > 1$, la fonction $I_n(x)$ est constante sur $[0, 1 - \frac{1}{n}]$ (égale à $I_n(0) = 1$ et $[1 - \frac{1}{n}, +\infty[$ (égale à 0 puisque $I_n \in \mathcal{D}$) et décroissante strictement sur $[1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$ Compte-tenu de la parité de I , on obtient alors les variations sur \mathbb{R} .

c)

d) On a pour tout x réel : $I_n(x) = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt} \int_{n(x-1)}^{n(x+1)} \varphi(u)du$ On sait que φ est continue et intégrable sur \mathbb{R} . Il y a donc plusieurs cas possibles :

1. Si $x > 1$: $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x-1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(x+1) = +\infty$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(x) = 0$.
2. Si $x = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(x) = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt} \int_0^{+\infty} \varphi(u)du = \frac{1}{2}$
3. Si $x \in [0, 1[$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x-1) = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x+1) = +\infty$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(x) = 1$.
4. Comme $I_n(x)$ est paire, on a donc finalement :

$$\begin{cases} \forall x \in]-1, 1[\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(x) = 1 \\ \forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(x) = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(-1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

J et I sont donc égales sauf en 1 ou -1. (Remarque : en tout point réel x , $J(x)$ vaut la demi-somme des limites à droite et à gauche de I . On dit que J est la régularisée de I .)

e) Les fonctions I_n sont continues sur \mathbb{R} alors que la limite n'est pas continue. La convergence n'est donc pas uniforme sur \mathbb{R} .

I.B-Fonctions C^∞ à décroissance rapide Remarque : \mathcal{S} est l'espace de Schwartz, mathématicien français « inventeur » des distributions. Il a formalisé un procédé utilisé auparavant en physique sans justification théorique solide.

I.B.1) \mathcal{S} est inclus dans l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans lui-même qui est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

L'application nulle appartient à \mathcal{S} donc \mathcal{S} est non vide.

Soient $(f, g) \in \mathcal{S}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + g$ est de classe C^∞ et $\forall n \in \mathbb{N} (\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}$. On a donc :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 \quad \lambda \lim_{x \rightarrow +\infty} x^m f^{(n)}(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} x^m g^{(n)}(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\lambda f + g)^{(n)}(x)$$

On a un résultat analogue en $-\infty$, donc $(\lambda f + g) \in \mathcal{S}$.

\mathcal{S} est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. C'est un espace vectoriel.

1.B.2) Pour toute fonction f de classe C^∞ et tout entier naturel p , $f^{(p)}$ est de classe C^∞ et pour tout entier naturel n , $(f^{(p)})^{(n)} = f^{(n+p)}$. Les conditions aux limites sont donc encore réalisées pour $f^{(p)}$, et donc $\forall f \in \mathcal{S}, \forall p \in \mathbb{N} f^{(p)} \in \mathcal{S}$.

1.B.3) On sait que toute fonction polynôme est de classe C^∞ , et ses dérivées sont des fonctions polynômes. D'autre part, par linéarité de la limite, on a, pour toute fonction polynôme P et tout $f \in \mathcal{S}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) f^{(n)}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) f^{(n)}(x) = 0$$

D'après la formule de Leibniz : $\forall n \in \mathbb{N} (Pf)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} f^{(n-k)}$ On a alors

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \forall k \in [0, n] \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^m P^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^m P^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x) = 0$$

puisque $x^m P^{(k)}(x)$ est une fonction polynôme.

Donc $Pf \in \mathcal{S}$.

II Espace des distributions sur \mathcal{D}

II.A.1) Il existe des réels c et d ($c < d$) tels que φ soit nulle à l'extérieur du segment $[c, d]$. $f\varphi$ est à support compact et continue par morceaux, donc l'intégrale existe bien et vaut $\int_c^d f(x)\varphi(x)dx$. Par linéarité de l'intégrale (on considère ici l'intégrale initiale de $-\infty$ à $+\infty$, T_f est linéaire. Enfin, si (φ_n) est une suite de fonctions de \mathcal{D} qui converge sur \mathcal{D} vers φ , alors il existe un réel a tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, |x| > a \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \varphi_n(x) = 0$ On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, T_f(\varphi_n) = \int_{-a}^a f(x)\varphi_n(x)dx$. Or f est bornée sur $[-a, a]$. Donc

$$\forall x \in [-a, a] |f(x)\varphi_n(x) - f(x)\varphi(x)| \leq \|f\|_\infty |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \|f\|_\infty \|\varphi_n - \varphi\|_\infty.$$

($\|f\|_\infty$ étant prise sur $[-a, a]$.) Donc, toujours sur $[-a, a]$:

$$\|\varphi_n f - \varphi f\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|\varphi_n - \varphi\|_\infty.$$

Et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} |T(\varphi_n) - T(\varphi)| \leq 2a \|f\|_\infty \|\varphi_n - \varphi\|_\infty.$$

Par conséquent, d'après l'hypothèse de convergence uniforme de φ_n vers φ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(\varphi_n) = T(\varphi).$$

Ceci prouve que T est une distribution.

II.A.2) Il s'agit probablement de T_U . Il suffit de montrer que U est continue par morceaux sur \mathbb{R} . Or U est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et a une limite à droite (1) et à gauche (0) en 0. Donc U est bien continue par morceaux sur tout segment donc continue par morceaux sur \mathbb{R} . Donc T_U est une distribution (appelée distribution de Heaviside.)

II.A.3) a) Si (φ_n) est une suite de fonctions de \mathcal{D} convergeant dans \mathcal{D} vers φ , alors elle converge uniformément, donc simplement vers la fonction φ et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(a) = \varphi(a)$$

Donc δ_a est une distribution.

b) On a $\forall t \in \mathbb{R} \varphi_n(t) = \varphi(n(t-a))$. Donc φ_n est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et à support compact. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^* \varphi_n(a) = 1$. S'il existe une fonction f continue par morceaux sur \mathbb{R} continue par morceaux telle que $T_f = \delta_a$, alors en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N} \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi_n(t) dt = 1.$$

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{1}{n}} f(t) \varphi(n(t-a)) dt = 1$$

Or φ est bornée sur \mathbb{R} et $\|\varphi\|_\infty = 1$. De plus, f est bornée sur $[a-1, a+1]$ et $[a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}] \subset [a-1, a+1]$ Donc

$$\left| \int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{1}{n}} f(t) \varphi(n(t-a)) dt \right| \leq \frac{2\|f|_{[-a,a]}\|_\infty}{n}$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{1}{n}} f(t) \varphi(n(t-a)) dt = 0.$$

On obtient donc une contradiction et δ_a n'est pas une distribution régulière.

II.B Dérivation des distributions sur \mathcal{D}

II.B.1) Si $\varphi \in \mathcal{D}$, alors $\varphi' \in \mathcal{D}$ donc T' est bien définie.

$$\forall (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{D}^2 \forall \lambda \in \mathbb{R} T'(\lambda\varphi_1 + \varphi_2) = -T(\lambda\varphi_1 + \varphi_2) = -\lambda T(\varphi_1) - T(\varphi_2) = \lambda T'(\varphi_1) + T'(\varphi_2)$$

Donc T' est linéaire. Soit une suite (φ_n) d'éléments de \mathcal{D} telle que : $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$. On a alors, d'après la définition : $(\varphi_n)' \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi'$. En effet, si une fonction dérivable est nulle en dehors de $[-a, a]$, il en est de même de sa dérivée, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite de fonctions $((\varphi_n)')^{(k)}$ converge uniformément vers $(\varphi')^{(k)}$ puisque $((\varphi_n)')^{(k)} = \varphi_n^{(k+1)}$. On a donc $T(\varphi_n') \rightarrow T(\varphi')$ et donc $T'(\varphi_n) \rightarrow T'(\varphi)$. T' est bien une distribution sur \mathcal{D} .

II.B.2) On fait une intégration par parties : Soit $\varphi \in \mathcal{D}$. Il existe $a > 0$ telle que φ est nulle en dehors de $[-a, a]$. φ' est alors nulle en dehors de $[-a, a]$. On a alors :

$$T_f'(\varphi) = -T_f(\varphi') = - \int_a^a \varphi'(x) f(x) dx = [-f(x)\varphi(x)]_{-a}^a + \int_{-a}^a \varphi(x) f'(x) dx = \int_{-a}^a \varphi(x) f'(x) dx = T_f(\varphi).$$

On a donc bien

$$(T_f)' = T_{f'}$$

. Ceci reste vrai si l'on a une fonction f continue C^1 par morceaux, la dérivée de f étant alors prise au sens usuel aux points où f est dérivable, et arbitraire aux autres points, puisque l'intégration par parties est encore possible comme le savent les $\frac{5}{2}$. (Et les autres n'ont pas à connaître ce qu'est une fonction de classe C^1 par morceaux).

II.B.3) $\forall \varphi \in \mathcal{D} T_U'(\varphi(x)) = -T_U(\varphi') = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = -[\varphi(x)]_0^{+\infty} = \varphi(0)$. Donc $T_U' = \delta_0$.

II.B.4) a) On a $\varphi = T_f$, où f est la fonction définie par :

$$\begin{cases} \text{si } t < -1, f(t) = 0 \\ \text{si } t \in [-1, 0], f(t) = t \\ \text{si } t \geq 0, f(t) = 1 \end{cases}$$

f est bien continue par morceaux, car elle a un seul point de discontinuité, en -1 , où elle a une limite à droite (0), et une limite à gauche (-1) finies. Donc T est une distribution régulière.

b) $\forall \varphi \in \mathcal{D}T'(\varphi) = -T(\varphi') = \int_{-1}^0 t\varphi'(t)dt + \int_0^{+\infty} \varphi'(t)dt = -[t\varphi(t)]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \varphi(t)dt + \varphi(0) = \varphi(-1)$.

Donc $T' = T_g + \delta_{-1}$ où g est la dérivée généralisée de f , égale à sa dérivée ordinaire sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ et quelconque ailleurs.

II.B.5) La dérivée est ici la dérivée généralisée, qui prend la valeur de la dérivée usuelle aux points où f est dérivable. a) $\forall \varphi \in \mathcal{D}T'_f(\varphi) = -T_f(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)dt$ On considère un réel strictement positif a tel que : $\forall x \in \mathbb{R} |x| \geq a \Rightarrow \varphi(x) = 0$. On suppose de plus, ce qui est possible que $-a < a_1 < \dots < a_p < a$. On obtient alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)dt = \int_{-a}^a f(t)\varphi'(t)dt = \int_a^{a_1} f(t)\varphi'(t)dt + \sum_{k=1}^{p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\varphi'(t)dt + \int_{a_p}^a f(t)\varphi'(t)dt$$

(Pour $p = 1$, on convient que la somme du milieu est nulle). La fonction f se prolonge de façon C^1 à chaque intervalle $]-\infty, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_p, +\infty[$ Appelons f_0, f_1, \dots, f_p respectivement ces prolongements.

On obtient alors :

$$\int_{-a}^{a_1} f(t)\varphi'(t)dt = \int_{-a}^{a_1} f_0(t)\varphi'(t)dt = [f_0(t)\varphi(t)]_{-a}^{a_1} - \int_{-a}^{a_1} f_0'(t)\varphi(t)dt = f(a_1^-)\varphi(a_1) - \int_{-a}^{a_1} f'(t)\varphi(t)dt$$

$$\text{De même : } \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\varphi'(t)dt = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(t)\varphi'(t)dt = [f_i(t)\varphi(t)]_{a_i}^{a_{i+1}} - \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i'(t)\varphi(t)dt \\ = f(a_{i+1}^-)\varphi(a_{i+1}) - f(a_i^+)\varphi(a_i) - \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(t)\varphi(t)dt.$$

$$\text{Et enfin, par le même procédé : } \int_{a_p}^a f(t)\varphi'(t)dt = \int_{a_p}^a f_p(t)\varphi'(t)dt = [f_p(t)\varphi(t)]_{a_p}^a - \int_{a_p}^a f_p'(t)\varphi(t)dt \\ = -f(a_p^+)\varphi(a_p) - \int_{a_p}^a f'(t)\varphi(t)dt. \text{ Par addition, et changement de signe, on obtient :}$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\varphi(t)dt + \sum_{i=1}^p (f(a_i^+) - f(a_i^-))\varphi(a_i).$$

On obtient donc bien :

$$T'_f = T_{f'} + \sum_{i=1}^p \sigma(a_i)\delta_{a_i}$$

b) La fonction T_U est de classe C^1 par morceaux, avec un point de discontinuité : $a_1 = 0$ et un saut en a_1 de 1. On a donc $T'_U = T_U \cdot \sigma(0)\delta_0 = \delta_0$. (Car U' est constante par intervalle donc sa dérivée généralisée est nulle). D'où le résultat de la question II.B.3.

De même, la fonction f de II.B.4) est de classe C^1 par morceaux, on a un saut de 1 en 0 et la dérivée généralisée vaut 0 sauf sur $]-1, 0[$ où elle vaut 1. On retrouve donc bien le résultat de II.B.4).

II.C-Suites de distributions sur \mathcal{D} a) Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$T_{U_n}(\varphi) = \int_0^{\frac{1}{n}} U(t)\varphi(t)dt + \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \varphi(t)dt$$

Or

$$\left| \int_0^{\frac{1}{n}} U(t)\varphi(t)dt \right| \leq \frac{1}{n} \|U\|_{\infty} \|\varphi\|_{\infty} \leq \frac{1}{n} \|\varphi\|_{\infty}$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} U(t)\varphi(t)dt = 0.$$

L'intégrale d'une fonction continue est continue par rapport à ses bornes finies, et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \varphi(t)dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t)dt$$

Et donc, on a bien :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} T_{U_n}(\varphi) = T_U(\varphi)$$

b) La fonction U_n est continue et de classe C^1 par morceaux. D'après la question II.B.2, on a :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} T'_{U_n}(\varphi) = T_{U'_n}(\varphi) = \int_0^{\frac{1}{n}} n\varphi(t)dt$$

puisque la dérivée généralisée de U_n vaut 0 à l'extérieur de l'intervalle $[0, \frac{1}{n}]$ et n à l'intérieur de cet intervalle.

c) On a comme dit précédemment $T'_{U_n} = T_{U'_n}$ (La valeur de U'_n étant arbitraire en 0 et 1.

d) V_n est une fonction en escalier.

e) On a : $\forall \varphi \in \mathcal{D} T'(\varphi) = -T(\varphi')$. Or, si une suite (φ_n) converge vers φ dans \mathcal{D} , la suite (φ'_n) converge vers φ'_n dans \mathcal{D} d'après les conditions de convergence données, encore valables pour φ' . Donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(\varphi'_n) = T(\varphi'),$$

et par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T'(\varphi_n) = T(\varphi).$$

f) On a

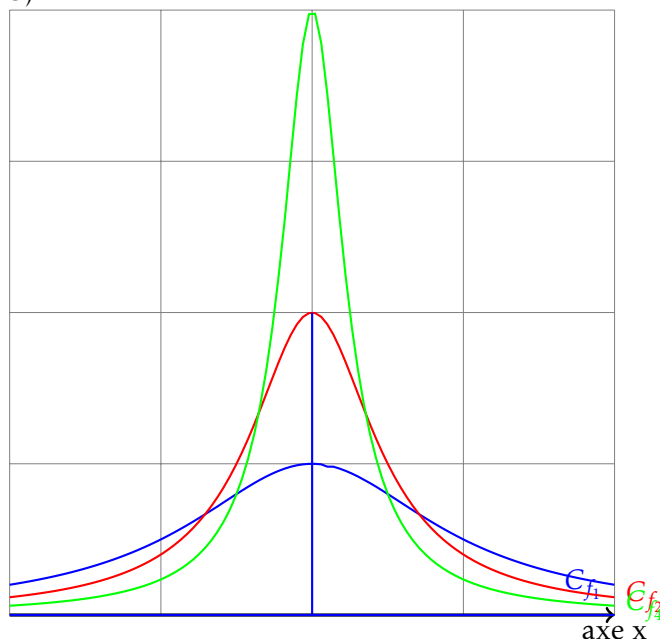
$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{U_n} = T_U,$$

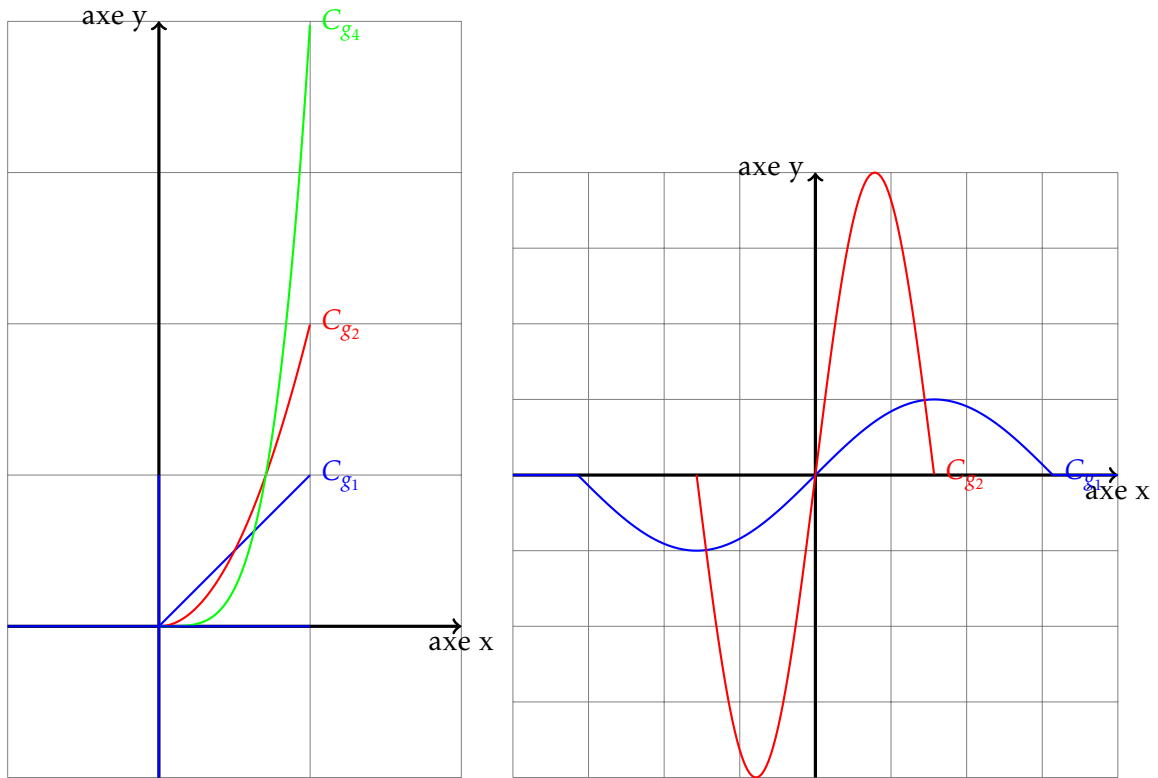
donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T'_{U_n} = T_{U'} = \delta_0.$$

II C2) a) Les trois fonctions données sont continues sur \mathbb{R} , sauf en un nombre fini de points où elles ont une limite finie à droite et à gauche.

b)





c) i) **Limite de (T_{f_n})** Il faut étudier la limite quand n tend vers $+\infty$ de $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{1+n^2x^2} \varphi(x) dx$ où $\varphi \in \mathcal{D}$. On effectue le changement de variable $u = nx, du = ndx$ d'où :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\frac{u}{n}\right) \frac{du}{1+u^2}$$

On définit la fonction g_n sur \mathbb{R} par $\forall u \in \mathbb{R} g_n(u) = \varphi\left(\frac{u}{n}\right) \frac{1}{1+u^2}$. g_n est définie continue et intégrable sur \mathbb{R} et $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t) dt = I_n$. On a, pour tout $u \in \mathbb{R} \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(u) = \frac{\varphi(0)}{1+u^2}$. De plus φ est bornée sur \mathbb{R} et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \in \mathbb{R} g_n(u) \leq \frac{\|\varphi\|_\infty}{1+u^2}$. Or $u \mapsto \frac{1}{1+u^2}$ est intégrable sur \mathbb{R} et on a donc une condition de domination. On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_{f_n}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(0) du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2} \varphi(0).$$

Par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{f_n} = \frac{\pi}{2} \delta_0$$

ii) **Limite de T_{g_n}**

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} T_{g_n}(\varphi) = \int_0^1 nx^n \varphi(x) dx$$

. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on fait le changement de variable $u = x^n$ et l'on obtient :

$$T_{g_n}(\varphi) = \int_0^1 u^{\frac{1}{n}} \varphi(u^{\frac{1}{n}}) du$$

Pour tout $u \in]0, 1]$ $\lim_{n \rightarrow \infty} u^{\frac{1}{n}} = 1$, et $\lim_{n \rightarrow \infty} 0^{\frac{1}{n}} = 0$. De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \in [0, 1] \left| u^{\frac{1}{n}} \varphi(u^{\frac{1}{n}}) \right| \leq \|\varphi\|_\infty$, et la fonction constante $u \mapsto \|\varphi\|_\infty$ est intégrable sur $[0, 1]$. On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi\|_\infty = \int_0^1 \varphi(1) du = \varphi(1).$$

La suite de distributions T_{g_n} converge donc vers δ_1 .

iii) Limite de (T_{h_n}) Soit $\varphi \in \mathcal{D}$. On a $T_{h_n}(\varphi) = \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} n^2 \varphi(x) \sin(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} n \varphi\left(\frac{u}{n}\right) \sin(u) du$ (On a posé $u = nx$. On effectue alors une intégration par parties avec $f'(u) = \sin(u)$, $f(u) = -\cos(u)$, $g(u) = n\varphi\left(\frac{u}{n}\right)$, $g'(u) = \varphi'\left(\frac{u}{n}\right)$). On obtient alors :

$$T_{h_n}(\varphi) = \left[-n \cos(u) \varphi\left(\frac{u}{n}\right) \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'\left(\frac{u}{n}\right) \cos(u) du$$

Le premier terme vaut $n\left(\varphi\left(\frac{\pi}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{\pi}{n}\right)\right)$. Comme φ est de classe C^1 , elle admet un développement limité en 0 $\varphi(h) = \varphi(0) + h\varphi'(0) + o_0(h)$. Donc

$$n\left(\varphi\left(\frac{\pi}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{\pi}{n}\right)\right) = 2\pi\varphi'(0) + o_0\left(\frac{1}{n}\right).$$

Et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n\left(\varphi\left(\frac{\pi}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{\pi}{n}\right)\right) = 2\pi\varphi'(0).$$

Quant à l'intégrale, on peut appliquer le théorème de convergence dominée :
D'une part, par continuité de φ' :

$$\forall u \in [0, \pi], \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi'\left(\frac{u}{n}\right) \cos(u) = \varphi'(0) \cos(u).$$

D'autre part, comme $\varphi' \in \mathcal{D}$, elle est bornée et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall u \in [-\pi, \pi] \left| \varphi'\left(\frac{u}{n}\right) \cos(u) \right| \leq \|\varphi'\|_{\infty}.$$

En utilisant le théorème de convergence dominée, on obtient donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'\left(\frac{u}{n}\right) \cos(u) du = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(u) du = 0.$$

Et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_{h_n}(\varphi) = 2\pi\varphi'(0).$$

Soit

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} T_{h_n} = -2\pi\delta'_0.}$$