

**Notations**

- Dans tout le problème, n est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 2.
- On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients réels.
- En particulier, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices colonnes à n lignes et à coefficients réels. Selon l'usage, on pourra librement identifier les espaces vectoriels $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et \mathbb{R}^n .
- On note $M_{i,j}$ le coefficient sur la i -ème ligne et j -ème colonne d'une matrice M .
- L'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de sa structure euclidienne usuelle. En particulier, si $(V, W) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, on pose

$$\langle V, W \rangle = \sum_{i=1}^n V_{i,1} W_{i,1} \quad \text{et} \quad \|V\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n V_{i,1}^2 \right)^{1/2}$$

- La notation ${}^t M$ désigne la transposée d'une matrice M , $\text{rg}(M)$ son rang et, lorsque M est carrée, $\text{tr}(M)$ sa trace. On rappelle que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_{k,l}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{R})$.
- On note également $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales d'ordre n , $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ le sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de déterminant positif et $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de déterminant négatif.
- Par définition, une rotation est un automorphisme orthogonal de l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de déterminant 1.

Objectif du problème

On se donne des vecteurs $X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_m$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et on cherche à déterminer, si c'est possible, une rotation r de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$r(X_i) = Y_i \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq m$$

Cela revient à déterminer une matrice $W \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ réalisant

$$WX_i = Y_i \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq m$$

Sans hypothèse sur les vecteurs X_i et Y_i , une telle rotation n'a pas de raison d'exister, ni d'être unique. C'est pourquoi on s'intéressera plutôt, dans la suite, au problème plus faible suivant : trouver une matrice $W \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ minimisant la quantité $\sum_{i=1}^m \|WX_i - Y_i\|_2^2$, autrement dit telle qu'en un sens les WX_i soient « aussi proches que possible » des Y_i .

I Questions préliminaires**I.A – Généralités sur les matrices orthogonales**

- I.A.1)** Quel est le déterminant d'une matrice de $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$? de $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$? On justifiera les réponses.
- I.A.2)** $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ est-il un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$?
- I.A.3)** Montrer que les valeurs absolues des coefficients d'une matrice orthogonale sont inférieures ou égales à 1.

I.B – Un exemple numérique

Dans cette section, $n = m = 2$. On pose

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad Y_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

On introduit les affixes respectives des vecteurs X_1, X_2, Y_1, Y_2 :

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad \beta_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \beta_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

I.B.1) Exprimer ces affixes sous forme trigonométrique puis simplifier pour tout réel θ la quantité

$$f(\theta) = |\beta_1 - e^{i\theta}\alpha_1|^2 + |\beta_2 - e^{i\theta}\alpha_2|^2$$

I.B.2) Déterminer les valeurs de θ qui minimisent $f(\theta)$. Illustrer le résultat par un dessin.

II Un problème d'optimisation

Dans cette partie, on fixe des éléments $X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_m$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et on se propose d'obtenir une matrice $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ minimisant $\sum_{i=1}^m \|WX_i - Y_i\|_2^2$ et, dans certains cas, une matrice $W \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ minimisant $\sum_{i=1}^m \|WX_i - Y_i\|_2^2$.

Dans toute cette partie, on note X (respectivement Y) la matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont X_1, \dots, X_m (respectivement Y_1, \dots, Y_m).

II.A – Un produit scalaire matriciel

II.A.1) Montrer que l'application

$$\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (M, N) \mapsto \text{tr}({}^t M N)$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On pose désormais

$$\langle M, N \rangle_F = \text{tr}({}^t M N) \quad \text{et} \quad \|M\|_F = \langle M, M \rangle_F^{1/2}$$

II.A.2) Montrer que, pour toute matrice $W \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\sum_{i=1}^m \|WX_i - Y_i\|_2^2 = \|WX - Y\|_F^2$$

II.A.3) Simplifier $\langle WM, WN \rangle_F$ et $\|WM\|_F$ pour $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $(M, N) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})^2$.

II.A.4) Simplifier aussi $\langle MW, NW \rangle_F$ et $\|MW\|_F$ pour $W \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ et $(M, N) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})^2$.

II.B – Dans cette section, on suppose que $m = n$.

II.B.1) Calculer $\|W\|_F$ pour $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

II.B.2) Montrer que si une suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ converge vers $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et en déduire que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II.B.3) Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II.C – Dans cette section, m et n ne sont plus supposés égaux.

II.C.1) Justifier l'existence d'une matrice $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ minimisant $\|WX - Y\|_F^2$, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall Z \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \quad \|WX - Y\|_F^2 \leq \|ZX - Y\|_F^2$$

II.C.2) Montrer que les matrices $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ minimisant $\|WX - Y\|_F^2$ sont les matrices $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ maximisant $\langle WX, Y \rangle_F$.

II.C.3) Déterminer à l'aide de X et Y une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour toute matrice $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$,

$$\langle WX, Y \rangle_F = \langle W, A \rangle_F$$

II.D – Dans cette section, Δ désigne une matrice diagonale d'ordre n à coefficients positifs.

II.D.1) Déterminer une matrice $W' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ maximisant $\langle W', \Delta \rangle_F$.

II.D.2) On suppose de plus que les coefficients diagonaux de la matrice Δ vérifient :

$$\Delta_{1,1} \geq \dots \geq \Delta_{r,r} > 0 \quad \text{et} \quad \Delta_{i,i} = 0 \quad \text{pour} \quad r+1 \leq i \leq n$$

(avec éventuellement $r = n$ dans le cas où tous les coefficients diagonaux de Δ sont non nuls). Déterminer toutes les matrices $W' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ maximisant $\langle W', \Delta \rangle_F$.

II.E – Dans cette section, on admet que A peut s'écrire sous la forme $Q\Delta({}^t P)$ avec $(Q, P) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^2$ et $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale avec des coefficients diagonaux vérifiant $\Delta_{1,1} \geq \dots \geq \Delta_{n,n} \geq 0$. Ce résultat sera démontré dans la **partie III**.

II.E.1) Déterminer à l'aide de P et Q une matrice $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ maximisant $\langle W, A \rangle_F$, et appartenant à $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $\det P \cdot \det Q > 0$.

II.E.2) Montrer que si $\det A > 0$, il existe une unique matrice $W \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ maximisant $\langle W, A \rangle_F$, au sens où

$$\forall Z \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R}), \quad \langle W, A \rangle_F \geq \langle Z, A \rangle_F$$

II.E.3) Dans cette question, on suppose que $\Delta_{n,n} = 0$. Déterminer une matrice $W' \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ maximisant $\langle W', \Delta \rangle_F$.

II.E.4) Dans cette question, on suppose que $\det A = 0$ et que $\det P \cdot \det Q < 0$. Dédurre de la question précédente une matrice $W \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ maximisant $\langle W, A \rangle_F$.

III Une décomposition matricielle

L'objectif de cette partie est d'établir le résultat admis dans la partie précédente.

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang $r \geq 1$.

III.A – Soit $B = ({}^t M)M$.

III.A.1) Montrer que B est une matrice symétrique réelle. Que peut-on en déduire ?

III.A.2) Montrer que B est positive, c'est-à-dire que pour tout $V \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $({}^t V)BV \geq 0$. En déduire que les valeurs propres de B sont positives.

III.A.3) Montrer que $\ker B = \ker M$. En déduire que $\text{rg}(B) = r$. (M étant une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on pose $\ker M = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), MX = 0\}$.)

III.B – Dans la suite de cette partie, on note :

- f l'application linéaire de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n canoniquement associée à M ,
- g l'endomorphisme de \mathbb{R}^p canoniquement associé à B ,
- $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres (distinctes ou non) de g rangées par ordre décroissant :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0 = \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_p$$

- et enfin (v_1, \dots, v_p) une base orthonormée de \mathbb{R}^p formée de vecteurs propres de g associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

III.B.1) On pose $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ pour $1 \leq i \leq p$ et $u_i = \frac{1}{\mu_i} f(v_i)$ pour $1 \leq i \leq r$. Montrer que (u_1, \dots, u_r) est une base orthonormée de $\text{Im}(f)$.

III.B.2) Soit $\Delta = (\Delta_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ la matrice dont les seuls coefficients non nuls sont $\Delta_{1,1}, \dots, \Delta_{r,r}$ qui valent μ_1, \dots, μ_r . Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R})$ telles que

$$M = Q\Delta P^{-1} = Q\Delta({}^t P)$$

IV Sur la trace des matrices orthogonales

Dans cette partie, on étudie la trace maximale d'une matrice de $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$, ce qui va permettre d'aboutir dans les cas laissés en suspens dans la **partie II** à une matrice $W \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ minimisant $\sum_{i=1}^m \|WX_i - Y_i\|_2^2$.

IV.A –

IV.A.1) Déterminer la trace maximale d'une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

IV.A.2) Soit E un espace vectoriel euclidien, et w un automorphisme orthogonal de E . Justifier que les seules valeurs propres possibles pour w sont 1 et -1 .

IV.A.3) Montrer que -1 est valeur propre de toute matrice $W \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$.

IV.A.4) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E , stable par un automorphisme orthogonal w de E , alors l'orthogonal de F est aussi stable par w .

IV.A.5) Montrer que pour tout $W \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$, il existe $P_1 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $W_1 \in \mathcal{O}_{n-1}^+(\mathbb{R})$ tels que

$$W = P_1 \begin{pmatrix} -1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & W_1 \end{pmatrix} ({}^t P_1)$$

où $0_{k,l}$ désigne la matrice nulle dans $\mathcal{M}_{k,l}(\mathbb{R})$.

IV.A.6) Conclure sur la trace maximale d'une matrice de $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$.

IV.B – On rappelle que minimiser $\sum_{i=1}^m \|WX_i - Y_i\|_2^2$ revient à maximiser $\langle W, A \rangle_F$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une certaine matrice qui peut s'écrire sous la forme $Q\Delta({}^t P)$ avec $(P, Q) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^2$ et $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale, à coefficients diagonaux vérifiant

$$\Delta_{1,1} \geq \dots \geq \Delta_{n,n} \geq 0$$

IV.B.1) Déterminer une matrice $W' \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ maximisant $\langle W', \Delta \rangle_F$ en commençant par écrire $\langle W', \Delta \rangle_F$ à l'aide de $\text{tr}(W')$ et des coefficients $W'_{i,i}$, pour $1 \leq i \leq n-1$.

IV.B.2) En déduire, lorsque $\det P \cdot \det Q < 0$, une matrice $W \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ maximisant $\langle W, A \rangle_F$.

V Calcul numérique

Dans cette partie, on étudie un algorithme permettant de calculer de manière approchée une matrice $W \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ minimisant $\sum_{i=1}^m \|WX_i - Y_i\|_2^2$ pour certaines matrices Y .

V.A – Étude d'une suite de réels

On considère \mathcal{E} l'ensemble des suites $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels vérifiant :

$$x_0 > 0 \quad \text{et} \quad x_{k+1} = x_k \cdot \frac{x_k^2 + 3}{3x_k^2 + 1} \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}$$

V.A.1) Écrire une instruction en Maple ou Mathematica permettant de calculer les trente premiers termes de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ telle que $x_0 = 0,1$.

V.A.2) Représenter graphiquement le comportement d'une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ pour un $x_0 > 0$ quelconque. On effectuera les calculs nécessaires à une représentation soignée.

V.A.3) Démontrer la convergence d'une telle suite et préciser sa limite.

V.B – Étude d'une suite de matrices

On considère \mathcal{F} l'ensemble des suites $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant les deux conditions suivantes :

i. Z_0 est inversible;

ii. $Z_{k+1} = Z_k({}^t Z_k Z_k + 3I_n)(3{}^t Z_k Z_k + I_n)^{-1}$ pour $k \in \mathbb{N}$ (I_n désigne la matrice identité d'ordre n).

V.B.1) Montrer que pour toute matrice $Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice $3{}^t Z Z + I_n$ est bien inversible.

V.B.2) Soit $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$. D'après la deuxième partie, Z_0 peut s'écrire sous la forme $QD({}^t P)$ avec $(Q, P) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^2$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs. On définit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'assertion \mathcal{P}_k ainsi : « Z_k peut s'écrire sous la forme $QD_k({}^t P)$ avec D_k diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs ». Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, \mathcal{P}_k est vraie.

V.B.3) Déterminer la limite de la suite $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

V.C – Une application

On fixe X_1, \dots, X_m des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et on note X la matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont X_1, \dots, X_m . On fixe également $W_0 \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$, et on pose $Y_0 = W_0 X$. On suppose de plus la matrice X de rang n .

V.C.1) Montrer qu'il existe un ouvert \mathcal{U} de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ contenant Y_0 tel que pour tout $Y \in \mathcal{U}$, l'on ait $\det(Y({}^t X)) > 0$.

V.C.2) Dans le cas où $Y \in \mathcal{U}$, quelle valeur donner à Z_0 pour que la suite $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ converge vers $W \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ minimisant $\sum_{i=1}^m \|WX_i - Y_i\|_2^2$?

• • • FIN • • •
