Centrale-Supélec 2011 - Filière PC
Corrigé de l'épreuve Mathématiques 2

Damien Broizat

8 août 2011

I Questions préliminaires

I.A - Généralités sur les matrices orthogonales

I.A.1) Si $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tWW = I_n$, d'où $(det(W))^2 = 1$. Or, $det(W) \in \mathbb{R}$, donc $det(W) \in \{-1, 1\}$. On en déduit que :

$$W \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad det(W) = 1, \qquad W \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad det(W) = -1.$$

I.A.2) $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, car $I_n \notin \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$.

I.A.3) Si $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors chaque colonne $W_j \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifie $\|W_j\|_2^2 = 1$, c'est-à-dire

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \qquad \sum_{i=1}^{n} W_{i,j}^2 = 1.$$

On a donc, pour tous i, j dans $\{1, \ldots, n\}$, $W_{i,j}^2 \leq 1$, c'est-à-dire $|W_{i,j}| \leq 1$.

I.B - Un exemple numérique

I.B.1) On a $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 2e^{i\pi/4}$, $\beta_1 = e^{i\pi/3}$ et $\beta_2 = e^{2i\pi/3}$, donc

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad f(\theta) = |e^{i\pi/3} - 2e^{i\theta}|^2 + |e^{2i\pi/3} - 2e^{i(\theta+\pi/4)}|^2.$$

En utilisant l'identité $|e^{ia} - 2e^{ib}|^2 = 5 - 4\cos(b - a)$, valable pour tous réels a et b, on obtient

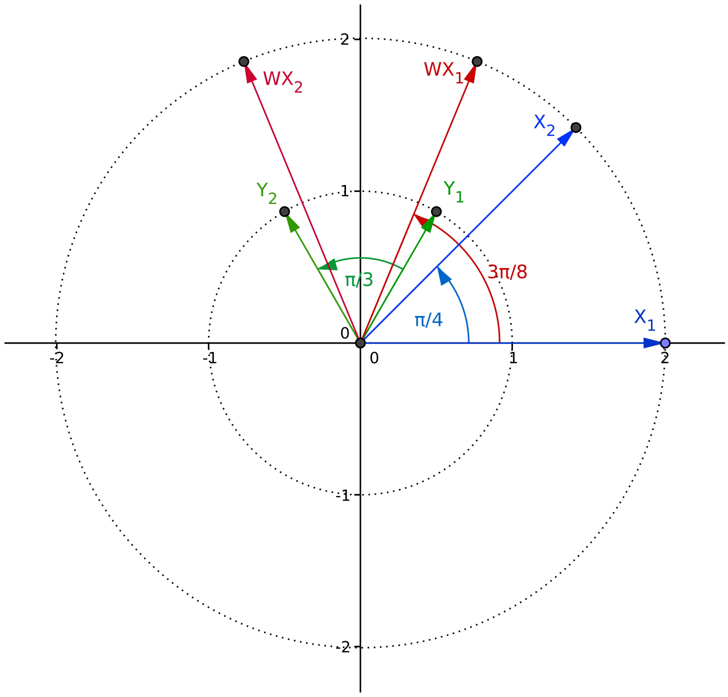
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad f(\theta) = 10 - 4\left(\cos(\pi/3 - \theta) + \cos(5\pi/12 - \theta)\right).$$

Enfin, la factorisation $\cos p + \cos q = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$ (pour p, q réels) donne

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad f(\theta) = 10 - 8\cos(\pi/24)\cos(3\pi/8 - \theta).$$

I.B.2) Clairement, l'expression $f(\theta)$ est minimale si et seulement si $\cos(3\pi/8 - \theta)$ est maximale, et ceci car $\cos(\pi/24) > 0$. Ceci équivaut à $\cos(3\pi/8 - \theta)$, ou encore

$$\theta = 3\pi/8\ [2\pi].$$



II Un problème d'optimisation

II.A - Un produit scalaire matriciel

II.A.1) Notons φ l'application définie sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ par

$$\varphi(M, N) = tr({}^t(M)N).$$

Cette application est bien définie car pour toutes matrices M, N de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, la matrice ${}^t(M)N$ est carrée de taille m. Cette application (à valeurs réelles) est bilinéaire (car la trace et la transposition sont linéaires), symétrique (car $\varphi(N, M) = tr({}^t(N)M) = tr({}^t({}^t(N)M)) = tr({}^t(M)N) = \varphi(M, N)$).
De plus, on a la formule

$$\varphi(M, N) = \sum_{i=1}^{m} ({}^t(M)N)_{i,i} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} M_{k,i} N_{k,i},$$

donc, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, on a

$$\varphi(M, M) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} M_{k,i}^2 \geq 0,$$

et cette quantité est nulle si et seulement si chacun de ses termes positifs est nul, c'est-à-dire si et seulement si chaque coefficient $M_{k,i}$ est nul. On a donc bien $\varphi(M, M) = 0 \Rightarrow M = 0$, d'où φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire un produit scalaire.

Remarque 1 *Remarquons les formules suivantes, utiles pour la suite : pour toutes matrices M, N de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$,*

$$\langle M, N \rangle_F = \sum_{j=1}^{m} \langle M_j, N_j \rangle, \qquad \|M\|_F^2 = \sum_{j=1}^{m} \|M_j\|_2^2.$$

où $M_j \in \mathbb{R}^n$ désigne la j^e colonne de M.

II.A.2) Si $W \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors la matrice $WX - Y$ est dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, et sa i^e colonne est $WX_i - Y_i$, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$. D'après la remarque précédente, on a alors

$$\|WX - Y\|_F^2 = \sum_{i=1}^{m} \|WX_i - Y_i\|_2^2.$$

II.A.3) Soit $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $M, N \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On a

$$\langle WM, WN \rangle_F = tr({}^t(WM)WN) = tr({}^tM{}^tWWN) = tr({}^tMN),$$

car ${}^tWW = I_n$. D'où la formule

$$\langle WM, WN \rangle_F = \langle M, N \rangle_F.$$

On en déduit également

$$\|WM\|_F = \|M\|_F.$$

II.A.4) Soit $W \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ et $M, N \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On a

$$\langle MW, NW \rangle_F = tr({}^t(MW)NW) = tr(({}^tW{}^tMN)W) = tr(W({}^tW{}^tMN)) = tr({}^tMN),$$

car $W{}^tW = I_m$. D'où la formule

$$\langle MW, NW \rangle_F = \langle M, N \rangle_F.$$

On en déduit également

$$\|MW\|_F = \|M\|_F.$$

II.B - Cas $m = n$

II.B.1) Si $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors d'après **II.A.3)**, on a $\|W\|_F = \|I_n\|_F = \sqrt{tr(I_n)} = \sqrt{n}$.

Remarque 2 *Attention, la réciproque est fausse : par exemple, la matrice* $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *n'est pas orthogonale, et pourtant on a* $\|M\|_F = \sqrt{2}$.

II.B.2) Montrons que ${}^tM_kM_k \to {}^tMM$ lorsque $k \to +\infty$.
Le $(i,j)^e$ coefficient de la matrice $P_k = {}^tM_kM_k$ est

$$P_{k,i,j} = \sum_{l=1}^{n} M_{k,l,i}M_{k,l,j}.$$

Or, la convergence de M_k vers M entraîne :

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}, \qquad M_{k,i,j} \underset{k\to+\infty}{\to} M_{i,j}.$$

On a donc $P_{i,j,k} \underset{k\to+\infty}{\to} \sum_{l=1}^{n} M_{l,i}M_{l,j} = ({}^tMM)_{i,j}$, ce qui montre $\lim\limits_{k\to+\infty} {}^tM_kM_k = {}^tMM$.
Or, par hypothèse, on a ${}^tM_kM_k = I_n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On en déduit (par unicité de la limite) que ${}^tMM = I_n$, c'est-à-dire que $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
On a donc montré que la partie $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de l'espace normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stable par limite, c'est donc une partie fermée.

Remarque 3 *Ici, peu importe la norme utilisée pour traduire la convergence de la suite de matrices, puisque l'espace vectoriel* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est de dimension finie* (n^2).

II.B.3) La partie $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est bornée, puisque d'après la question **II.B.1)**, on a

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset B(0, \sqrt{n})$$

($B(0, \sqrt{n})$ désigne la boule fermée de centre la matrice nulle et de rayon $\sqrt{n}$ pour la norme $\| \ \|_F$).
D'après la question précédente, cette partie est également fermée, elle est donc compacte (car l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie).

II.C - Cas général

II.C.1) L'application $\varphi_{X,Y}$ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \varphi_{X,Y}(M) = \|MX - Y\|_F^2$$

est continue. En effet,
- l'application $T \mapsto \|T\|_F^2$ est continue de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ (une norme est toujours continue),
- l'application $M \mapsto MX - Y$ est également continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ (on le voit facilement : on considérant une suite de matrices M_k qui converge vers M et on montre que $M_kX - Y$ tend vers $MX - Y$ lorsque $k \to +\infty$, en regardant "coefficient par coefficient"),
- et $\varphi_{X,Y}$ est la composée de ces deux applications.

La partie $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant compacte, et l'application $\varphi_{X,Y}$ continue, cette dernière est bornée sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et atteint ses bornes. A fortiori, $\varphi_{X,Y}$ atteint son minimum, c'est-à-dire qu'il existe $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall Z \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \qquad \varphi_{X,Y}(W) \leq \varphi_{X,Y}(Z).$$

II.C.2) L'identité

$$\|WX - Y\|_F^2 = \|WX\|_F^2 + \|Y\|_F^2 - 2\langle WX, Y\rangle_F = \|X\|_F^2 + \|Y\|_F^2 - 2\langle WX, Y\rangle_F,$$

vraie pour toute matrice $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (d'après **II.A.3)**), montre que la propriété

$$\forall Z \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \qquad \|WX - Y\|_F^2 \leq \|ZX - Y\|_F^2$$

est équivalente à

$$\forall Z \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \qquad \langle WX, Y\rangle_F \geq \langle ZX, Y\rangle_F.$$

On a donc : $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ minimise $\|WX - Y\|_F^2$ si et seulement si W maximise $\langle WX, Y\rangle_F$.

II.C.3) La matrice $A = Y^tX \in M_n(\mathbb{R})$ vérifie bien l'égalité voulue. En effet, pour toute matrice orthogonale $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, nous avons

$$\langle W, A\rangle_F = tr({}^tWY^tX) = tr({}^tX^tWY) = tr({}^t(WX)Y) = \langle WX, Y\rangle_F.$$

II.D - Cas où A est diagonale d'ordre n à coefficients positifs

II.D.1) Soit $W' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Puisque Δ est diagonale, nous avons, d'après les formules de la remarque 1,

$$\langle W', \Delta\rangle_F = \sum_{j=1}^{n} W'_{j,j}\Delta_{j,j}.$$

D'après la question **I.A.3)**, on peut majorer ceci indépendamment de W' :

$$\forall W' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \qquad \langle W', \Delta\rangle_F \leq \sum_{j=1}^{n} \Delta_{j,j},$$

car $|W'_{j,j}| \leq 1$ et $\Delta_{j,j} \geq 0$. Or, cette borne est atteinte car $\langle I_n, \Delta\rangle_F = \sum_{j=1}^{n} \Delta_{j,j}$.

La matrice $W' = I_n$ maximise donc $\langle W', \Delta\rangle_F$ sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

II.D.2) Les hypothèses sur Δ entraînent :

$$\forall W' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \qquad \langle W', \Delta\rangle_F = \sum_{j=1}^{r} W'_{j,j}\Delta_{j,j},$$

d'où la majoration

$$\forall W' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \qquad \langle W', \Delta\rangle_F \leq \sum_{j=1}^{r} \Delta_{j,j},$$

et cette borne est atteinte pour $W' = I_n$.
Donc les matrices $W' \in O_n(\mathbb{R})$ qui maximisent $\langle W', \Delta\rangle_F$ sont les matrices orthogonales telles que

$$\sum_{j=1}^{r} W'_{j,j}\Delta_{j,j} = \sum_{j=1}^{r} \Delta_{j,j},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^{r}(1 - W'_{j,j})\Delta_{j,j} = 0.$$

Vu que $\Delta_{j,j} > 0$ et $1 - W'_{j,j} \geq 0$ pour tout j, cette condition équivaut donc à

$$W'_{1,1} = \cdots = W'_{j,j} = 1.$$

Les matrices cherchées sont donc les matrices orthogonales telles que $W'_{1,1} = \cdots = W'_{j,j} = 1$. Ce sont les matrices de la forme $W' = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & W'' \end{pmatrix}$, avec $W'' \in \mathcal{O}_{n-r}(\mathbb{R})$ En effet :

- dans une matrice orthogonale, toute ligne ou colonne comportant un 1 a ses autres coefficients tous nuls, vu que la ligne/colonne en question est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$),
- en faisant un produit en blocs, on voit que ${}^tW'W' = I_n$ implique ${}^tW''W'' = I_{n-r}$,
- enfin, ces matrices vérifient bien $W' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\langle W', \Delta\rangle_F = \sum_{j=1}^{r} \Delta_{j,j}$.

II.E - Cas où A est quelconque

II.E.1) En décomposant A sous la forme $A = Q\Delta{}^tP$ avec P et Q orthogonales et Δ diagonale telle que $\Delta_{1,1} \geq \Delta_{2,2} \geq \cdots \geq \Delta_{n,n} \geq 0$, on obtient, pour toute matrice orthogonale W :

$$\langle W, A\rangle_F = \langle {}^tQWP, \Delta\rangle_F.$$

Vu que l'application $W \mapsto {}^tQWP$ est une bijection de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, d'inverse $W' \mapsto QW'\,{}^tP$, maximiser $\langle W, A\rangle_F$ revient à maximiser $\langle W', \Delta\rangle_F$ pour $W' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
Or, d'après **II.D.1)**, $W' = I_n$ maximise $\langle W', \Delta\rangle_F$.
On a donc $W = QI_n{}^tP = Q{}^tP$ qui maximise $\langle W, A\rangle_F$ sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
Enfin, $det(Q{}^tP) = det(P).det(Q)$, donc $Q{}^tP \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $det(P).det(Q) > 0$.

Remarque 4 *On peut montrer, en plus de l'existence de la décomposition $A = Q\Delta{}^tP$, que Δ est unique (ses coefficients diagonaux sont les valeurs propres de la matrice symétrique positive ${}^tAA$ rangées par ordre décroissant). En revanche, les matrices orthogonales P et Q ne sont pas nécessairement uniques.*

II.E.2) Toujours en utilisant la même décomposition, on a

$$det(A) = det(Q\Delta{}^tP) = det(Q).det(\Delta).det(P) = \left(\prod_{i=1}^{n} \Delta_{i,i}\right) det(P).det(Q).$$

Vu que $det(A) > 0$, et que $\Delta_{i,i} \geq 0$ pour tout i, on a $det(P).det(Q) > 0$, et donc la matrice $Q{}^tP$ est dans $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$. D'après la question précédente, cette matrice maximise bien $\langle W, A\rangle_F$, ce qui prouve l'existence.
Pour l'unicité, on utilise le résultat de la question **II.D.2)** : ici, on a

$$\Delta_{1,1} \geq \Delta_{2,2} \geq \cdots \geq \Delta_{n,n} > 0$$

(car Δ est inversible, vu que A, P, Q le sont), donc la seule matrice qui maximise $\langle W', \Delta\rangle_F$ est $W' = I_n$.
Or, d'après **II.E.1)**, W' maximise $\langle W', \Delta\rangle_F$ si et seulement si $W = QW'{}^tP$ maximise $\langle W, A\rangle_F$. Ceci montre que la seule matrice orthogonale qui maximise $\langle W, A\rangle_F$ est $W = Q{}^tP$.

Remarque 5 *Même si l'unicité des matrices P et Q dans la décomposition de A n'est pas vraie en général, on a quand même l'unicité du produit Q^tP, comme unique solution d'un problème de maximisation.*

II.E.3) La matrice $W' = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ et maximise bien $\langle W', \Delta\rangle_F$ car

$$\langle W', \Delta\rangle_F = \sum_{i=1}^{n} W'_{i,i}\Delta_{i,i} = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta_{i,i}$$

(puisque $\Delta_{n,n} = 0$), et on a la majoration

$$\forall Z \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \qquad \langle Z, \Delta\rangle_F \leq \sum_{i=1}^{n-1} \Delta_{i,i}$$

(voir la question **II.D.1)**).

II.E.4) Si $det(A) = 0$, alors on a nécessairement $\Delta_{n,n} = 0$ (sinon, tous les $\Delta_{i,i}$ seraient strictement positifs, et on aurait $det(A) > 0$). D'après la question précédente, on obtient, en raisonnant comme en **II.E.2)**, que la matrice orthogonale $W = Q \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} {}^tP$ maximise $\langle W, A\rangle_F$, et cette matrice est bien dans $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$, car son déterminant vaut $-det(P).det(Q)$, nombre strictement positif par hypothèse.

III Une décomposition matricielle

III.A - Etude de la matrice $B = {}^tMM$

III.A.1) On a $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et ${}^tB = {}^t({}^tMM) = {}^tMM = B$, ce qui montre que B est réelle symétrique. On en déduit que les valeurs propres de B sont réelles, et que B est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

III.A.2) Soit V une colonne de $\mathbb{R}^p$. On a $({}^tV)BV = {}^tV{}^tMMV = {}^t(MV)MV = \|MV\|_2^2 \geq 0$, donc la matrice B est positive. Notons $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de B, et $V \neq 0$ un vecteur propre associé. On a alors $BV = \lambda V$, donc

$$({}^tV)BV = \lambda{}^tVV = \lambda\|V\|_2^2.$$

Vu que $({}^tV)BV \geq 0$ et que $\|V\|_2^2 > 0$, ceci montre que $\lambda \geq 0$.

III.A.3) L'inclusion $KerM \subset KerB$ est évidente, puisque $MX = 0$ entraîne ${}^tMMX = 0$, pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^p$.
Réciproquement, si $X \in \mathbb{R}^p$ est tel que $BX = 0$, c'est-à-dire ${}^tMMX = 0$, alors ceci implique ${}^tX{}^tMMX = 0$, soit $\|MX\| = 0$, d'où $MX = 0$, et $KerB \subset KerM$.
On a donc $KerB = KerM$.
Le théorème du rang appliqué à $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ puis à $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ donne alors :

$$rg(B) = p - dim(KerB) = p - dim(KerM) = rg(M) = r.$$

III.B - Preuve de la décomposition

III.B.1) Montrons que la famille $(u_1, \ldots, u_r)$ est une base orthonormée de $Im(f)$.
Tout d'abord, chaque vecteur u_i est bien dans $Im(f)$, car

$$\forall i \in \{1, \ldots, r\}, \qquad u_i = f\left(\frac{1}{\mu_i}v_i\right).$$

Ensuite, pour tout (i,j) dans $\{1,\ldots,r\}^2$, on a

$$\langle u_i,u_j\rangle = \frac{1}{\mu_i\mu_j}\langle f(v_i),f(v_j)\rangle = \frac{1}{\mu_i\mu_j}\langle Mv_i,Mv_j\rangle = \frac{1}{\mu_i\mu_j}\langle v_i,{}^tMMv_j\rangle = \frac{1}{\mu_i\mu_j}\langle v_i,g(v_j)\rangle.$$

Or, $g(v_j)=\lambda_j v_j$, donc, puisque la famille $(v_1,\ldots,v_r)$ est orthonormée,

$$\langle u_i,u_j\rangle = \frac{\lambda_j}{\mu_i\mu_j}\langle v_i,v_j\rangle = \frac{\lambda_j}{\mu_i\mu_j}\delta_{i,j} = \frac{\mu_j}{\mu_i}\delta_{i,j} = \delta_{i,j},$$

ce qui montre que la famille $(u_1,\ldots,u_r)$ est orthonormée (et donc libre).
Enfin, cette famille libre de $Im(f)$ possède r vecteurs, et $dim(Im(f))=r$, donc cette famille est une base de $Im(f)$.

III.B.2) Notons $\mathcal{B}=(v_1,\ldots,v_p)$, c'est une base orthonormée de $\mathbb{R}^p$. De plus, complétons la famille orthonormée $(u_1,\ldots,u_r)$ en une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ notée $\mathcal{B}'=(u_1,\ldots,u_r,u_{r+1},\ldots,u_n)$.
La matrice de l'application linéaire f dans ces bases est

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \left(\begin{array}{ccc|c} \mu_1 & 0 & 0 & \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) = \Delta$$

car $f(v_i)=\lambda_i v_i=\mu_i u_i$ pour $1\le i\le r$ et $f(v_{r+1})=\cdots=f(v_p)=0$ car $\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_p=0$.
En notant P la matrice (orthogonale de taille p) qui exprime $\mathcal{B}$ en fonction de la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et Q la matrice (orthogonale de taille n) qui exprime $\mathcal{B}'$ en fonction de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a donc

$$Q^{-1}MP=\Delta,$$

soit

$$M=Q\Delta P^{-1}=Q\Delta({}^tP).$$

IV Sur la trace des matrices orthogonales

IV.A -

IV.A.1) Si $W\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors, puisque chaque coefficient $W_{i,j}$ est compris entre -1 et 1 (d'après **I.A.3)**), alors

$$tr(W)=W_{1,1}+\cdots+W_{n,n}\le n.$$

De plus, cette borne est atteinte pour $W=I_n$, donc la trace maximale d'une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est n.

IV.A.2) Soit λ une valeur propre **réelle** de $w\in\mathcal{O}(E)$, et $x\in E\setminus\{0\}$ un vecteur propre associé. On a alors $w(x)=\lambda x$, donc $|\lambda|=\frac{\|w(x)\|}{\|x\|}=1$ (car w conserve la norme), ce qui montre que $\lambda\in\{-1,1\}$.

IV.A.3) Soit $W\in\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$. Considérons W comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: les valeurs propres de W sont des complexes de module 1, par le même raisonnement que dans la question précédente. Le polynôme caractéristique de W étant à coefficients réels, les valeurs propres complexes non réelles (notées $\omega_1,\ldots,\omega_k$) sont deux à deux conjuguées. Dès lors, si -1 n'est pas valeur propre de W, 1 est la seule valeur propre réelle de W et on a :

$$det(W)=\prod_{l=1}^{k}\omega_l\,\overline{\omega_l}=\prod_{l=1}^{k}|\omega_l|^2=1,$$

ce qui contredit $W\in\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$. Ceci montre que -1 est valeur propre de W.

IV.A.4) Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par $w \in \mathcal{O}(E)$. Montrons que $F^{\perp}$ est également stable par w.
Etant donné $x \in F^{\perp}$ et $y \in F$, on a $\langle w(x), y\rangle = \langle x, w^{-1}(y)\rangle$. L'espace F étant stable par w, la restriction $w_{|F}$ est un automorphisme (orthogonal) de F, et donc $w^{-1}(y) \in F$.
On en déduit (puisque $x \in F^{\perp}$) $\langle w(x), y\rangle = \langle x, w^{-1}(y)\rangle = 0$, et donc $w(x) \in F^{\perp}$.

IV.A.5) Notons $w \in \mathcal{O}^{-}(\mathbb{R}^n)$ l'automorphisme orthogonal canoniquement associé à W. D'après la question **IV.A.3)**, -1 est valeur propre de w. Notons $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre (non nul) de w, et $D = Vect(x)$. La droite D est stable par w (car $w(x) = -x$), donc d'après **IV.A.4)**, l'hyperplan $H = D^{\perp} = \{x\}^{\perp}$ est également stable par w, et la restriction $w_{|H}$ est un élément de $\mathcal{O}(H)$.
Choisissons maintenant une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ adaptée à la somme directe orthogonale $\mathbb{R}^n = D \oplus H$ (par exemple, $e_1 = \frac{x}{\|x\|}$ et $(e_2, \ldots, e_n)$ une quelconque base orthonormée de H).
La matrice de w dans $\mathcal{B}$ est $W' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & W_1 \end{pmatrix}$, où $W_1 = Mat_{(e_2,\ldots,e_n)}(w_{|F}) \in \mathcal{O}_{n-1}(\mathbb{R})$.
On a donc $P_1^{-1} W P_1 = W'$, où P_1 est la matrice (orthogonale) de passage de la base canonique à la base orthonormée $\mathcal{B}$, ce qui se réécrit

$$W = P_1 W' ({}^t P_1).$$

Enfin, $-1 = det(W) = det(W') = -1 \times det(W_1)$, donc $det(W_1) = 1$, ce qui montre que $W_1 \in \mathcal{O}^{+}_{n-1}(\mathbb{R})$, donnant ainsi la décomposition voulue.

IV.A.6) En utilisant les notations de la question précédente, nous avons

$$\forall W \in \mathcal{O}_n^{-}(\mathbb{R}), \qquad tr(W) = tr(W') = -1 + tr(W_1) \leq -1 + n - 1 = n - 2,$$

d'après la question **IV.A.1)**. De plus, cette borne est atteinte par $W = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$.
La trace maximale d'une matrice de $\mathcal{O}_n^{-}(\mathbb{R})$ est donc $n - 2$.

IV.B -

IV.B.1) Soit $W' \in \mathcal{O}_n^{-}(\mathbb{R})$ et Δ une matrice diagonale telle que

$$\Delta_{1,1} \geq \cdots \geq \Delta_{n,n} \geq 0.$$

On a alors :

$$\langle W', \Delta\rangle_F = \sum_{j=1}^{n} W'_{j,j}\Delta_{j,j} = \sum_{j=1}^{n} W'_{j,j}\Delta_{n,n} + \sum_{j=1}^{n-1} W'_{j,j}(\Delta_{j,j} - \Delta_{n,n}) = \Delta_{n,n} tr(W') + \sum_{j=1}^{n-1} W'_{j,j}(\Delta_{j,j} - \Delta_{n,n}).$$

Or, $tr(W') \leq n - 2$ (d'après la question précédente), $W'_{j,j} \leq 1$ et $\Delta_{j,j} - \Delta_{n,n} \geq 0$ pour tout $j \in \{1, \ldots n-1\}$, donc on obtient la majoration :

$$\forall W' \in \mathcal{O}_n^{-}(\mathbb{R}), \qquad \langle W', \Delta\rangle_F \leq (n-2)\Delta_{n,n} + \sum_{j=1}^{n-1}(\Delta_{j,j} - \Delta_{n,n}) = \sum_{j=1}^{n-1}\Delta_{j,j} - \Delta_{n,n}.$$

Et cette borne supérieure est atteinte pour $W' = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Cette dernière matrice maximise donc bien la quantité voulue sur $\mathcal{O}_n^{-}(\mathbb{R})$.

IV.B.2) En décomposant encore A sous la forme $A = Q\Delta^t(P)$ et en utilisant la formule

$$\langle W, A\rangle_F = \langle {}^t Q W P, \Delta\rangle_F,$$

on obtient d'après la question précédente, et vu que l'application $W \mapsto {}^t Q W P$ est une bijection de $\mathcal{O}_n^{+}(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{O}_n^{-}(\mathbb{R})$ (car $det(P).det(Q) < 0$), que la matrice

$$W = Q \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} {}^t P$$

est bien un maximiseur de $\langle W, A\rangle_F$ sur $\mathcal{O}_n^{+}(\mathbb{R})$.

V Calcul numérique

V.A - Etude d'une suite de réels

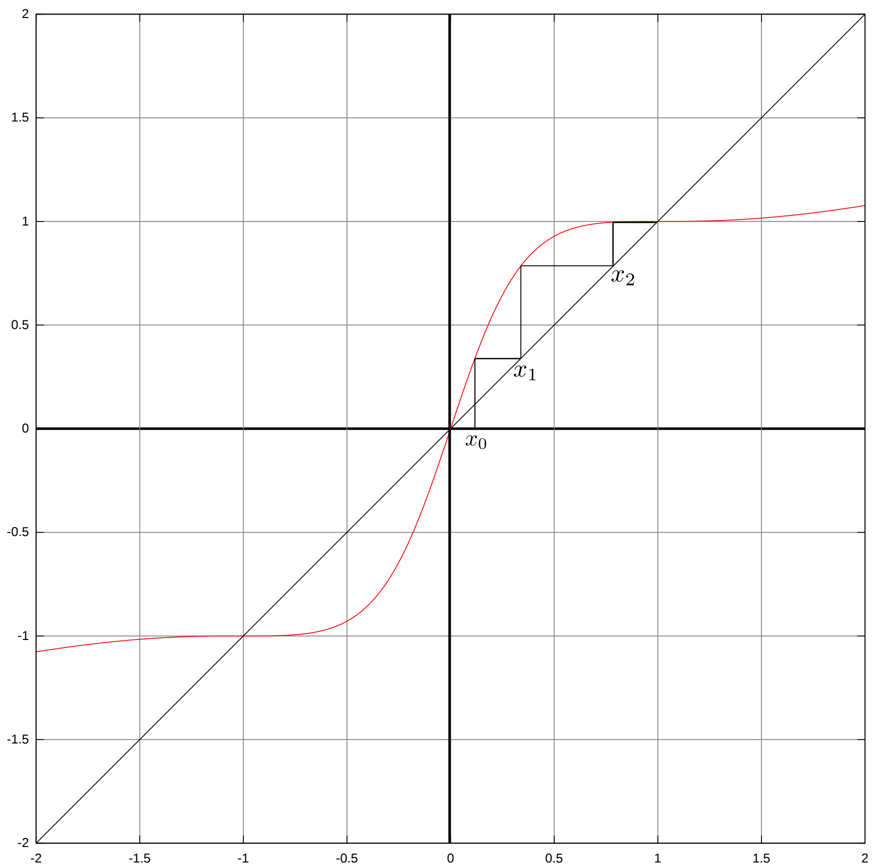
V.A.1) L'instruction Maple suivante calcule les trente premiers termes de la suite donnée :

```
x[0]:=0.1;
for k from 0 to 29 do
x[k+1]:=x[k]*(((x[k]^2)+3)/(3*(x[k]^2)+1))
od;
```

V.A.2) La suite donnée est définie par son premier terme et formule de récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad x_{k+1} = f(x_k),$$

où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x(x^2+3)}{3x^2+1}$.
Une rapide étude montre que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et possède trois points fixes : -1, 0 et 1. On peut conjecturer graphiquement que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 pour toute valeur initiale $x_0 > 0$.



V.A.3) Montrons rigoureusement la convergence vers 1 de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Tout d'abord, l'intervalle $]0,+\infty[$ est stable par f (car $f(]0,+\infty[) =]0,+\infty[$), donc tous les termes x_k sont strictement positifs puisque le premier l'est. De plus, le fait que f est croissante assure la monotonie de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Pour affiner l'étude, on distingue trois cas :

- si $x_0 = 1$, alors la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1 (puisque $f(1) = 1$), donc elle converge vers 1.
- si $x_0 \in]0,1[$, alors, puisque $f(]0,1[) =]0,1[$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée par 0 et 1. De plus, on a

$$\forall x \in]0,1[, \qquad f(x) > x,$$

ce qui montre que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
Etant croissante et majorée, la suite est donc convergente, et sa limite l est un point fixe de f appartenant à $[0,1]$. Ce n'est pas 0 car la suite est croissante et strictement positive, c'est donc 1.

- si $x_0 > 1$, alors, puisque $f(]1,+\infty[) =]1,+\infty[$, la suite est minorée par 1. De plus, on a

$$\forall x \in]1,+\infty[, \qquad f(x) < x,$$

ce qui montre que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Etant décroissante et minorée, la suite est donc convergente, et sa limite l est le seul point fixe de f appartenant à $[1,+\infty[$, c'est-à-dire 1.

V.B - Etude d'une suite de matrices

V.B.1) Notons $M = 3^tZZ + I_n$, et montrons que cette matrice symétrique est inversible. Etant donné un vecteur colonne $X \in \mathbb{R}^n$, on a

$${}^tXMX = 3^tX^tZZX + {}^tXX = 3\|ZX\|_2^2 + \|X\|_2^2 \geq \|X\|_2^2,$$

donc cette quantité est strictement positive si $X \neq 0$, ce qui montre que M est définie positive, donc inversible.

V.B.2) Montrons par récurrence que l'assertion $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par hypothèse, $\mathcal{P}_0$ est vraie, en posant $D_0 = D$. Soit maintenant $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_k$ soit vraie, et montrons $\mathcal{P}_{k+1}$. Vu que $Z_k = QD_k{}^tP$, on a ${}^tZ_kZ_k = P^tD_k{}^tQQD_k{}^tP = P(D_k^2)({}^tP)$, donc

$${}^tZ_kZ_k + 3I_n = P(D_k^2 + 3I_n)({}^tP),$$

$$(3^tZ_kZ_k + I_n)^{-1} = P(3D_k^2 + I_n)^{-1}({}^tP),$$

ce qui donne

$$Z_{k+1} = Z_kP(D_k^2 + 3I_n)(3D_k^2 + I_n)^{-1}({}^tP) = Q\left(D_k(D_k^2 + 3I_n)(3D_k^2 + I_n)^{-1}\right){}^tP.$$

On pose $D_{k+1} = D_k(D_k^2 + 3I_n)(3D_k^2 + I_n)^{-1}$. En notant $D_k = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(k)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{(k)} \end{pmatrix}$ avec les $\lambda_i^{(k)} > 0$,

on a facilement $D_{k+1} = \begin{pmatrix} f(\lambda_1^{(k)}) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n^{(k)}) \end{pmatrix}$, où f est la fonction étudiée en **V.A.2)**. Vu que $f(]0,+\infty[) =]0,+\infty[$, on obtient que les coefficients diagonaux de D_{k+1} sont strictement positifs, ce qui montre $\mathcal{P}_{k+1}$, et achève la récurrence.

V.B.3) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a donc $D_k = \begin{pmatrix} f^k(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f^k(\lambda_n) \end{pmatrix}$, où $f^k = f \circ \cdots \circ f$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sont les coefficients diagonaux (tous strictement positifs) de D.
L'étude de la suite réelle faite en **V.A.3)** montre que :

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \qquad f^k(\lambda_i) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

et donc que

$$\lim_{k\to+\infty} D_k = I_n.$$

On conclut (par la continuité du produit matriciel, déjà établie auparavant), que

$$\lim_{k\to+\infty} Z_k = Q^tP.$$

V.C - Une application

V.C.1) L'application de $\Psi_X : \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall Y \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}), \qquad \Psi_X(Y) = det(Y^t X)$$

est continue (car le produit matriciel et le déterminant sont deux applications continues). De plus, on a

$$\Psi_X(Y_0) = det(W_0 X^t X) = det(X^t X),$$

car $det(W) = 1$. Or, la matrice $X^t X$ est carrée de taille n, et (d'après **III.A**) $rg(X^t X) = rg(X) = n$, donc $X^t X$ est inversible. De plus, cette matrice est clairement symétrique et positive, donc elle est définie positive et son déterminant est strictement positif.
Ceci montre donc que $\Psi_X(Y_0) > 0$. Par continuité, l'application Ψ_X reste donc strictement positive dans un voisinage de Y_0, ce qui répond à la question.

V.C.2) On doit maximiser $\langle W, A \rangle_F$ sur $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$, où $A = Y^t X$ (voir **II.C**). Ici, on suppose $Y \in \mathcal{U}$, ce qui entraîne $det(A) > 0$. D'après **II.E.2)**, il existe une unique matrice $W \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ qui réalise cette maximisation. De plus, en écrivant

$$A = Q \Delta^t P,$$

on a

$$W = Q^t P.$$

On initialise donc l'algorithme avec $Z_0 = A = Y^t X$. On a montré en **V.B.3)** que l'algorithme converge vers $Q^t P = W$, c'est-à-dire le maximiseur cherché.