I Systèmes de racines

I.A- Pour tout $x \in E$, on décompose de manière unique $x = \lambda\alpha + x'$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x' \perp \mathbb{R}$. Alors $(x,\alpha) = \lambda(\alpha,\alpha)$ donc $\lambda = \dfrac{(x,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ et donc :

$$\tau_\alpha(x) = x' - \lambda\alpha = x - 2\lambda\alpha = x - 2\frac{(x,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$$

I.B- Soit $\mathcal{R}$ un système de racines de E. $\mathcal{R}$ est non vide, donc soit $\alpha \neq 0$ élément de $\mathcal{R}$. τ_α n'est autre que la symétrie par rapport à 0, donc $-\alpha \in \mathcal{R}$. Il n'y a pas d'autre élément colinéaire à α dans $\mathcal{R}$, donc $\mathcal{R} = \{-\alpha, \alpha\}$. Réciproquement, une telle paire vérifie bien les quatre hypothèses requises, donc les systèmes de racines de E sont les paires $\{-\alpha, \alpha\}$.

I.C-

I.C.1) Dans cette question, nous noterons $\theta = \theta_{\alpha,\beta}$.

a) α et β appartenant au système de racines $\mathcal{R}$, les deux valeurs : $2\dfrac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} = 2\dfrac{||\alpha||.||\beta||.\cos(\theta)}{||\alpha||^2} = 2\dfrac{||\beta||}{||\alpha||}\cos(\theta)$ et : $2\dfrac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} = 2\dfrac{||\alpha||}{||\beta||}\cos(\theta)$ sont des entiers, donc leur produit $4\cos^2(\theta)$ est un entier, et comme $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, on a $4\cos^2(\theta) \in \{0,1,2,3,4\}$.
Si $4\cos^2\theta = 4$, alors $\cos^2\theta = 1$ donc $\theta = 0$ ou π, ce qui est absurde, car alors α et β seraient colinéaires.
Finalement, $4\cos^2(\theta) \leq 3$.

b) Comme $4\cos^2\theta \in 0,1,2,3$, on peut commencer à remplir le tableau :

$\cos\theta$	θ	r	$2\dfrac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$
0	$\pi/2$	≥ 1	0
$1/2$	$\pi/3$	1	1
$-1/2$	$2\pi/3$	1	-1
$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$	$\sqrt{2}$	2
$-\sqrt{2}/2$	$3\pi/4$	$\sqrt{2}$	-2
$\sqrt{3}/2$	$\pi/6$	$\sqrt{3}$	3
$-\sqrt{3}/2$	$5\pi/6$	$\sqrt{3}$	-3

Notons $r = ||\beta||/||\alpha|| \geq 1$. $2r\cos\theta$ et $\dfrac{2}{r}\cos\theta$ sont des entiers. Notons $p = 2r|\cos\theta| \in \mathbb{N}$.

A. Si $|\cos\theta| = 1/2$, alors $r = p$ et $1/p$ est un entier, donc $p = 1$ et donc $r = 1$.
B. Si $|\cos\theta| = \sqrt{2}/2$, alors $r = p/\sqrt{2}$ et $2/p$ est un entier, donc $p = 1$ ou $p = 2$. $p = 1$ est absurde car $r \geq 1$, donc $r = \sqrt{2}$.
C. Si $|\cos\theta| = \sqrt{3}/2$, alors $r = p/\sqrt{3}$ et $3/p$ est un entier, donc $p = 1$ ou $p = 3$. $p = 1$ est absurde car $r \geq 1$, donc $r = \sqrt{3}$.

I.C.2) On a indiqué dans le tableau les valeurs correspondantes.

I.D-

I.D.1) Par définition, $\mathcal{R}$ engendre E, donc possède au moins deux éléments non colinéaires. $\mathcal{R}$ étant fini, l'ensemble $\{\theta_{\alpha,\beta} | \alpha \neq \beta, \alpha \neq -\beta\}$ est fini et non vide, donc admet un minimum. Si $\theta_{\alpha,\beta} \geq \pi/2$, alors $\theta_{-\alpha,\beta} = \pi - \theta_{\alpha,\beta} \leq \pi/2$, donc d'après I.C), $\theta_{\mathcal{R}} \in \{\pi/2, \pi/3, \pi/4, \pi/6\}$.

I.D.2) Méthode : on se donne $\alpha = \alpha_0$ unitaire (pour fixer les idées), puis on place les β d'angles $\pi/3$, $2\pi/3$, $\pi/4$, $3\pi/4$, $\pi/6$, $5\pi/6$ s'ils sont compatibles avec $\theta_{\mathcal{R}}$, en tenant compte du rapport des normes indiqué dans le tableau. On place alors les β orthogonaux à α_0 en tenant compte qu'ils font un angle $\pi/2 - \theta_{\mathcal{R}}$ avec un autre vecteur, ce qui permet de fixer leur norme. On songera également à tenir compte des symétries (axiome nn^o 2) qui empêche dans $\mathcal{R}_4$, par exemple, le vecteur orthogonal à α_0 d'être de norme 2. (cf. figure 1).

a) Pour $k = 2$, pas de contrainte sur les normes des vecteurs. $\mathcal{R}_2$ est de cardinal 4.
b) Pour $k = 3$, les vecteurs sont de même norme et Card$\mathcal{R}_3 = 6$.
c) Pour $k = 4$, Card$\mathcal{R}_4 = 8$.
d) Pour $k = 6$, Card$\mathcal{R}_6 = 12$.

I.E-

I.E.1) $\mathcal{R}_0 = \{\pm(e_1 - e_2), \pm(e_2 - e_3), \pm(e_3 - e_1)\}$. $e_1 - e_2$ et $e_2 - e_3$ sont clairement indépendants, mais $(e_1 - e_2) + (e_2 - e_3) + (e_3 - e_1) = 0$ donc les autres vecteurs leur sont coplanaires. Ainsi, $\mathcal{R}$ engendre un plan vectoriel de E.

I.E.2) On reconnaît $\mathcal{R}_3$ (cf. figure 2).

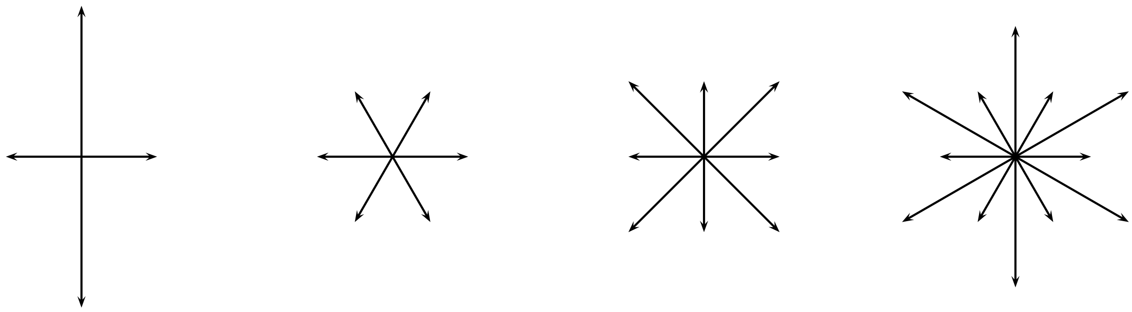

Figure 1 – Les systèmes $\mathcal{R}_2$,$\mathcal{R}_3$, $\mathcal{R}_4$ et $\mathcal{R}_6$

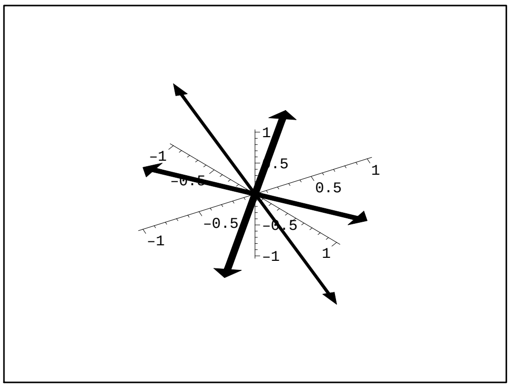

Figure 2 – Le système $\mathcal{R}_0$

II Propriétés de $\mathcal{M}_0(n, \mathbb{K})$

II.A-

II.A.1) $\mathcal{M}_0(n, \mathbb{K})$ est le noyau de la trace, qui est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, ce dernier étant de dimension n^2, donc $\dim \mathcal{M}_0(n, \mathbb{K}) = n^2 - 1$.

II.A.2) Pour tout (A, B), $\mathrm{Tr}\,([A, B]) = \mathrm{Tr}\,(AB - BA) = \mathrm{Tr}\,(AB) - \mathrm{Tr}\,(BA) = 0$, donc $[A, B] \in \mathcal{M}_0(n, \mathbb{K})$.

II.B- Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$,

$$j(x, y, z) = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc j définit une application linéaire de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathcal{M}(\in, \mathbb{K})$. De plus, $\mathrm{Tr}\,(j(x, y, z)) = 0$ donc j est bien définie de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$. Si $j(x, y, z) = 0$, alors $x = y + z = y - z = 0$, donc $x = y = z = 0$, ce qui montre que j est injective. Comme $\dim \mathbb{K}^3 = \dim \mathcal{M}_0(2, \mathbb{K}) = 3$ (d'après II.A2), j est un isomorphisme de $\mathbb{K}^3$ sur $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$.

II.C- $i \Rightarrow ii$ Soit $r > 0$ tel que $A^r = 0$. Alors $\det(A)^r$ donc $\det(A) = 0$ et $0 \in \mathrm{Sp(A)}$. De plus X^r est annulateur donc $\mathrm{Sp(A)} \subset \{0\}$. D'où : $\mathrm{Sp(A)} = \{0\}$.

$ii \Rightarrow iii$ Soit X_1 vecteur propre associé à 0, et X_2 indépendant de X_2. Soit $P = (X_1|X_2)$ écrite par blocs. Alors $A = P \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1}$. $\beta = 0$ car c'est une valeur propre. On a $AX_21 = 0$ et $AX_2 = \alpha X_2$. $\alpha \neq 0$ sinon $A = 0$, donc $Q = (\alpha X_1|X_2)$ (par blocs) est inversible et $A = Q \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$, cqfd.

$iii \Rightarrow i$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$ donc $A^2 = 0$.

II.D-

II.D.1) Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. Réciproquement, Supposons que A et A', éléments de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{C})$ ont le même polynôme caractéristique $\chi(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$.
Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors A et A' sont diagonalisable (polynôme caractéristique scindé à racines simples) et sont semblables à $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.
Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, alors $0 = \mathrm{Tr}\,(A) = 2\lambda$ donc $\lambda = 0$ et $\chi(X) = X^2$, donc $\mathrm{Sp(A)} = \mathrm{Sp(A')} = \{0\}$ et les deux matrices sont semblables à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

II.D.2) Résultat faux pour $n = 3$, par exemple, pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (même polynôme caractéristique $-X^3$ mais rangs différents). En dimension $n \geq 3$, on obtient un contre-exemple à l'aide des matrices écrites par blocs à partir de A et A' :

$$\begin{pmatrix} A & 0_{3,n-3} \\ 0_{n-3,3} & 0_{n-3,n-3} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} A' & 0_{3,n-3} \\ 0_{n-3,3} & 0_{n-3,n-3} \end{pmatrix}$$

II.E-

II.E.1) a) Le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{C}$, à racines simples, donc A est semblable à $\begin{pmatrix} ir & 0 \\ 0 & -ir \end{pmatrix} = irH_0$, c-à-d. il existe $P \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ telle que $irH_0 = P^{-1}AP$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $A^2 + r^2 I_2 = 0$ (PSI). En PC :

$$P(A^2 + r^2 I_2)P^{-1} = (irH_0)^2 + r^2 I_2 = -r^2 I_2 + r^2 I_2 = 0$$

donc $A^2 + r^2 I_2 = 0$.

b) $w \neq 0$. Si $(\frac{1}{r}f(w), w)$ liée, alors w est un vecteur propre de f. Or le polynôme caractéristique de f n'a pas de racine réelle, donc f n'admet aucun vecteur propre. On en déduit que $B' = (\frac{1}{r}f(w), w)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$, donc une base (dimension 2), et dans cette base :

$$M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & r \\ -r & 0 \end{pmatrix} = rJ_0$$

(car $f^2 = -r^2\mathrm{id}$ donc $f(\frac{1}{r}f(w) = -rw$.)

II.E.2) Soit $\chi(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ le polynôme caractéristique de A et A' éléments de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{R})$, λ_1 et λ_2 étant complexes. Si λ_1 et λ_2 sont réels, l'étude est semblable au II.D et les matrices sont semblables. Sinon, λ_1 et λ_2 sont imaginaires conjuguées, et $0 = \mathrm{Tr}\,(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ donc les deux valeurs propres sont imaginaires pures. Notons-les ir et $-ir$, avec $r \neq 0$. D'après II.E.1, A et A' sont toutes deux semblables à rJ_0. Réciproquement, deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, cqfd.

II.E.3) a) Soit $M = j(x, y, z)$, de polynôme caractéristique $\chi_M(t) = \begin{vmatrix} x - t & y + z \\ y - z & -x - t \end{vmatrix} = t^2 - x^2 - y^2 + z^2$.

A. $\chi_{X_0}(t) = t^2$; donc Q_{X_0} a pour équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$: c'est un cône de révolution de sommet O et d'axe (Oz).

B. $\chi_{rJ_0}(t) = t^2 + r^2$ donc Q_{rJ_0} a pour équation $-x^2 - y^2 + z^2 = r^2$: hyperboloïde de révolution (2 valeurs propres égales) à 2 nappes (2 signes -)

C. $\chi_{rH0}(t) = t^2 - r^2$ donc Q_{rH_0} a pour équation $x^2 + y^2 - z^2 = r^2$: hyperboloïde de révolution à 1 nappe.

b) On a réprésenté l'hyperboloïde à une nappe et le cône avec une partie en moins pour bien voir les trois quadriques (cf. figure 3).

II.F-

II.F.1) PSI : $\mathrm{Tr}\,(M) = 0$ donc $\chi_M(X) = X^2 + \det(M)$. Avec le th. de Cayley-Hamilton, $M^2 = -\det(M)I_2$ donc $\mathrm{Tr}\,(M^2) = -2\det(M)$.

PC : On écrit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Tr}\,(M^2) = 2a^2 + 2bc = -2(-a^2 - bc) = -2\det(M)$.

II.F.2) D'après II.C, M est nilpotente ssi $\chi_M(X) = X^2$, ssi $\det(M) = 0$ et avec II.F.1, ssi $\mathrm{Tr}\,(M^2) = 0$.

II.F.3) $\mathrm{Tr}\,([A, B]^2) = \mathrm{Tr}\,(AB[A, B] - BA[A, B]) = \mathrm{Tr}\,(AB[A, B]) - B[A, B]A) = \mathrm{Tr}\,([A, B[A, B]]) = 0$. donc $[A, B]$ est nilpotente.

II.G-

II.G.1) On pose $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. $MX_0 = X_0M$ ssi $c = 0$ et $a = d$, c'est-à-dire $M = aI_2 + bX_0$. Réciproquement, tout élément de $\mathrm{Vect}(()I_2, X_0)$ commute avec X_0, donc $\mathrm{Vect}(()I_2, X_0)$ est l'ensemble des matrices qui commutent avec X_0. Si on impose $\mathrm{Tr}\,(M) = 0$, il vient de plus $a = 0$, donc $\mathrm{Vect}(()X_0)$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_0(2, \mathbb{K})$ qui commutent avec X_0.

II.G.2) On vérifie que $H_0X_0 - X_0H_0 = 2X_0$, $X_0Y_0 - Y_0X_0 = H_0$, et $H_0Y_0 - Y_0H_0 = -2Y_0$, donc (X_0, H_0, Y_0) est un triplet admissible. Si on considère les endomorphismes associés à ces trois matrices, ils vérifient les mêmes relations, ainsi que leurs matrices dans toute base. Ainsi, pour toute matrice P inversible, $(PX_0P^{-1}, PH_0P^{-1}, PY_0P^{-1})$ est un triplet admissible.

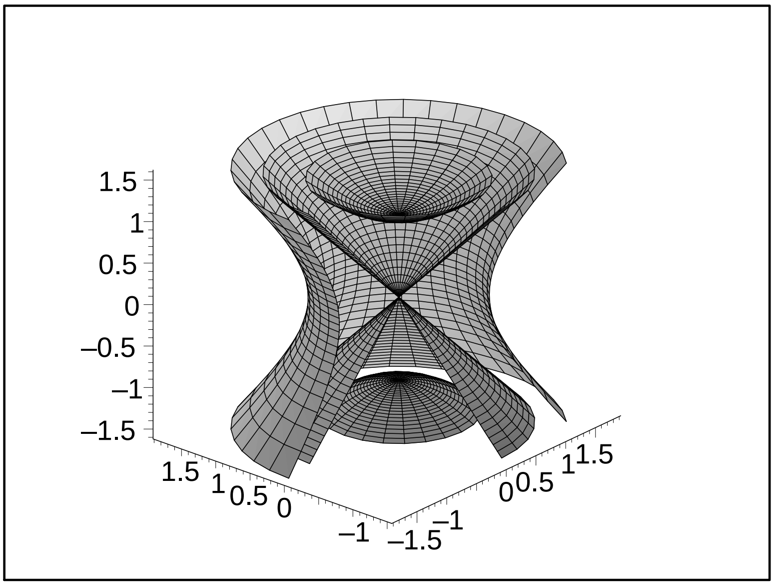

FIGURE 3 – Les quadriques $\mathcal{Q}_{X_0}$, $\mathcal{Q}_{J_0}$ et $\mathcal{Q}_{H_0}$

II.G.3) $[H, X] = -2X$ donc X et $[X, H]$ commutent. D'après II.F, $[X, H]$ est nilpotente, donc $X = \frac{-1}{2}[X, H]$ est nilpotente, et elle est donc semblable à X_0 d'après II.C. On fixe donc Q inversible telle que $X = QX_0Q^{-1}$.

II.G.4) a) Remarquons $Xu = QX_0Q^{-1}Q\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Comme X n'est pas nulle, elle est de rang 1 donc $\mathrm{Ker}\,(X) = \mathrm{Vect}(()u)$.

$2Xu = [H, X]u = HXu - XHu$ implique alors $XHu = 0$. Hu est donc élément du noyau de X, qui est engendré par u, donc il existe $\alpha \in \mathbb{K}$, $Hu = \alpha u$, ce qui montre que u est un vecteur propre de H.

b) Remarquons $Xv = QX_0Q^{-1}Q\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = u$

$2Xv = HXv - XHv$ implique alors : $XHv = (\alpha - 2)u$.

Il vient $XHv = (\alpha-2)Xv$ donc $Hv-(\alpha-2)v \in \mathrm{Ker}\,(X)$, c-à-d. il existe $t \in \mathbb{K}$ tel que $Hv = (\alpha-2)v+tu$. Ainsi, on peut exprimer la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à H dans la base (u, v), autrement dit :

$$H = Q\begin{pmatrix}\alpha & t\\ 0 & \alpha - 2\end{pmatrix}$$

Or $H = [X, Y]$ donc $\mathrm{Tr}\,(H) = 0$, et donc $2\alpha - 2 = 0$, c-à-d. $\alpha = 1$. On conclut :

$$H = Q\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & -1\end{pmatrix}Q^{-1}$$

c) Diagonalisons la matrice $M_t = \begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & -1\end{pmatrix}$: $E_1(M_t) = \mathrm{Vect}(()1, 0)$ et $E_{-1}(M_t) = \mathrm{Vect}(() - t/2, 1)$. On pose donc $T = \begin{pmatrix}1 & -t/2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Il vient :

$$H = QTH_0T^{-1}Q^{-1}$$

II.G.5) a) X est semblable à X_0, et les matrices de $\mathcal{M}_0(2\mathbb{K})$ qui commutent avec X_0 sont les éléments de $\mathrm{Vect}(()X_0)$.

$\mathcal{M}_0(2\mathbb{K})$ étant stable par similitude (la trace étant invariante), les élements qui commutent avec X sont donc ceux de $\mathrm{Vect}(()X)$.

b) $\Phi_X(Y - Y') = [X, Y] - [X, Y'] = H - H = 0$ et $\Phi_H(Y - Y') = [H, Y] - [H, Y'] = -2(Y - Y')$.

c) D'après II.G.5b, $Y - Y'$ commute avec X donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $Y - Y' = \lambda X$. On a alors : $[H, Y - Y'] = \lambda[H, X] = 2\lambda X = 2(Y - Y')$. On a trouvé le résultat opposé au II.G5b, donc $Y - Y' = 0$, cqfd.

II.G.6) On remarque $T = I - t/2X_0$, donc T commute avec X_0 et $PX_0P^{-1} = QTX_0T^{-1}Q^{-1} = QX_0Q^{-1} = X$. On a déjà établi $H = PH_0P^{-1}$. D'après II.G.2, (X, H, PY_0P^{-1}) est un triplet admissible donc d'après II.G.5, $Y = PY_0P^{-1}$.

III Propriétés de $\mathcal{M}_0(n,\mathbb{K})$

III.A-

III.A.1) Dans une base de V adaptée à W, la matrice de f est triangulaire par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix}$$

f étant diagonalisable, il existe P polynôme scindé à racines simples tel que $P(M) = 0$, ce qui implique $P(M_1) = 0$, donc M_1 est diagonalisable (annulé par un polynôme scindé à racines simples). Or M_1 est la matrice de $f|_W$, donc $f|_W$ est diagonalisable.

III.A.2) Cours en PSI (si $x \in E_\lambda(f)$, alors $f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$ donc $g(x) \in E_\lambda(f)$.)

III.A.3) Question classique ! On procède par récurrence sur $n = \dim V$. Si $n = 1$, le cas est trivial. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose le résultat vrai pour tout dimension $m \leq n$. Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de V, diagonalisables et commutant deux à deux. Si tous les f_i sont des homothéties, alors toute base diagonalise simultanément les f_i.
Sinon, on fixe $j \in I$ tel que f_j ne soit pas une homothétie et on considère ses sous-espaces propres W_1,..., W_p associés respectivement aux valeurs propres (distinctes) λ_1, ..., λ_p.
D'après III.A.1 et III.A.2, pour tout k, les W_k sont stables par tout f_i, et les restrictions des f_i à W_k sont diagonalisables, donc il existe une base B_k de W_k qui diagonalise $f_i|_{W_k}$. Comme f_j est diagonalisable, les sous-espaces W_k sont supplémentaires et en recollant les B_k, on obtient une base de V qui diagonalise simultanément les f_i.

III.B-

III.B.1) a) On pose $H = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Soit $M \in \mathcal{M}(n,\mathbb{K})$. Si on note $M = (C_1|...|C_n) = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$ (écrite par blocs colonnes ou blocs lignes), alors : $HM = \begin{pmatrix} \lambda_1 L_1 \\ \vdots \\ \lambda_n L_n \end{pmatrix}$ et $MH = (\lambda_1 C_1|...|\lambda_n C_n)$.
On en déduit $E_{ij}H = \lambda_j E_{ij}$ et $HE_{ij} = \lambda_i E_{ij}$, et donc :

$$[H, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}$$

En particulier, la base canonique est une base de vecteurs propres de Φ_H (qui est donc diagonalisable).

b) Quel que soit $H \in \mathcal{E}$, la matrice de Φ_H dans la base canonique est diagonale, donc les Φ_H commutent deux à deux. $\mathcal{A}$ est stable par Φ_H, pour tout $H \in \mathcal{E}$. Les restrictions des Φ_H sont diagonalisables (d'après III.A1) et commutent deux à deux, donc (III.Ac), il existe une base de $\mathcal{A}$ dans laquelle leur matrice sont toutes diagonales.

III.B.2) a) $\mathcal{A}_\lambda$ est l'intersection des sous-espaces propres $E_{\lambda(H)}(\Phi_H)$, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$.

b) Soit $M \neq 0$ un élément de $\mathcal{A}_\lambda$. Soient $H, H' \in \mathcal{E}$ et $k \in \mathbb{K}$. Alors d'une part : $\Phi_{kH+H'}(M) = \lambda(kH + H').M$, de l'autre : $\Phi_{kH+H'}(M) = [kH+H', M] = k\Phi_H(M) + \Phi_{H'}(M) = (k\lambda(H) + \lambda(H')).M$. Comme $M \neq 0$, on identifie : $\lambda(kH + H') = k\lambda(H) + \lambda(H')$, et donc λ est une forme linéaire sur $\mathcal{E}$.

III.C-

III.C.1) $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(4,\mathbb{K})$, de dimension 10.
Posons $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & -{}^tA' \end{pmatrix}$. Alors :

$$[M, M'] = \begin{pmatrix} [A, A'] + BC' - CB' & AB' - A'B - B^tA + B'^tA \\ CA' - {}^tAC' - C'A + {}^tA'C & CB' - C'B + [{}^tA, {}^tA'] \end{pmatrix}$$

On constate $[M, M'] \in \mathcal{A}$.
Pour tout $M \in \mathcal{E}$, et $H \in \mathcal{E}$, $\Phi_H(M) = 0$ donc $M \in \mathcal{A}_0$. Réciproquement, supposons $M \in \mathcal{A}_0$. Pour tout $H = \operatorname{diag}(D, -D)$, où D est un bloc diagonal d'ordre 2, alors d'après les calculs précédents :

$$[H, M] = \begin{pmatrix} [D, A] & DB + BD \\ -DC - CD & [D, {}^tA] \end{pmatrix} = 0$$

En particulier, A commute avec toute matrice diagonale, donc A est diagonale (A laisse invariant les sous-espaces propres de D...). Lorsque $D = I_2$, les égalités $BD + BD = DC + CD = 0$ donnent $B = C = 0$, donc $M \in \mathcal{E}$.

$\mathcal{E}$ a pour base (E_1, E_2) avec $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

III.C.2) a) On constate $e_1(E_1) = e_2(E_2) = 1$ et $e_1(E_2) = e_2(E_1) = 0$, donc (e_1, e_2) est la base duale de (E_1, E_2).

b) On reconnaît $\mathcal{R}_4$.

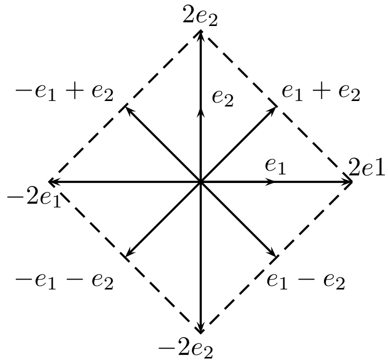

Figure 4 – Le système $\mathcal{R}$

III.C.3) Les calculs ne sont pas si lourds si on s'y prend bien... Soit $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ a_3 & a_4 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & -a_1 & -a_3 \\ c_2 & c_3 & -a_2 & -a_4 \end{pmatrix}$ un élément quelconque de $\mathcal{A}$. Pour tout $H = \mathrm{diag}(d_1, d_2, -d_1, -d_2) \in \mathcal{E}$, on calcule $[H, M]$. La question III.B.1.a montre comment la calculer :

$$[H, M] = \begin{pmatrix} 0 & (d_1 - d_2)a_2 & (2d_1)b_1 & (d_1 + d_2)b_2 \\ (d_2 - d_1)a_3 & 0 & (d_2 + d_1)b_2 & (2d_2)b_3 \\ (-2d_1)c_1 & (-d_1 - d_2)c_2 & 0 & -(-d_1 + d_2)a_3 \\ (-d_2 - d_1)c_2 & (-2d_2)c_3 & -(-d_2 + d_1)a_2 & 0 \end{pmatrix}$$

M appartient à $\mathcal{A}_\alpha$ si et seulement si, pour tout $H \in \mathcal{E}$, $[H, M] = \alpha(H).M$. Les termes de ces matrices sont des formes linéaires en (d_1, d_2), qui sont identiques si et seulement si leurs coefficients sont égaux. Ainsi :

Pour $\alpha = e_1 + e_2$, c-à-d. : $\alpha(H) = d_1 + d_2$, il y a égalité si et seulement si tous les coefficients de M sont nuls, sauf éventuellement b_2.

Pour $\alpha = 2e_1$, c-à-d. : $\alpha(H) = 2d_1$, il y a égalité si et seulement si tous les coefficients de M sont nuls, sauf éventuellement b_1.

Pour $\alpha = e_1 - e_2$, c-à-d. : $\alpha(H) = d_1 - d_2$, il y a égalité si et seulement si tous les coefficients de M sont nuls, sauf éventuellement a_2.

Pour $\alpha = 2e_2$, c-à-d. : $\alpha(H) = 2d_2$, il y a égalité si et seulement si tous les coefficients de M sont nuls, sauf éventuellement b_3.

On peut poursuivre l'étude pour les quatre autres formes, ou remarquer que $M \in \mathcal{A}_\alpha \Rightarrow {}^tM \in \mathcal{A}_{-\alpha}$, on obtient finalement 8 droites vectorielles :

α	base de $\mathcal{A}_\alpha$
$e_1 - e_2$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = E_{12} - E_{43}$
$-e_1 + e_2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{21} - E_{34}$
$2e_1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{13}$
$-2e_1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{31}$
$2e_2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{24}$
$-2e_2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{42}$
$e_1 + e_2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{14} + E_{23}$
$-e_1 - e_2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{41} + E_{32}$

III.C.4) Soit $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ a_3 & a_4 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & -a_1 & -a_3 \\ c_2 & c_3 & -a_2 & -a_4 \end{pmatrix}$ un élément quelconque de $\mathcal{A}$. Notons E_α le vecteur directeur de $\mathcal{A}_\alpha$ donné au III.C.3, et résolvons l'équation : $M = x_1 E_1 + x_2 E_2 + \sum\limits_{\alpha \in \mathcal{R}} x_\alpha E_\alpha$. Elle admet l'unique solution dans $\mathbb{R}^{10}$:

$$x_1 = a_1, x_2 = a_4, x_{e_1-e_2} = a_2, x_{e_1+e_2} = b_2, x_{2e_1} = b_1, x_{-2e_1} = c_1, x_{2e_2} = b_3, x_{-2e_2} = c_3, x_{-e_1-e_2} = c_2, x_{-e_1+e_2} = a_3$$

Ainsi, la réunion des bases de $\mathcal{A}_0$ et des $\mathcal{A}_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{R}$, est une base de $\mathcal{A}$, ce qui montre que ces sous-espaces sont supplémentaires.

III.C.5) D'après III.C.3, $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}(\mathcal{A})$. Soit $\lambda \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$. Soit $M \in \mathcal{A}_\lambda$, tel que $M \neq 0$. On décompose, avec des notations évidentes : $M = M_0 + \sum\limits_{\alpha \in \mathcal{R}} M_\alpha$. On a, en appliquant Φ_H :

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \alpha(H) M_\alpha = \lambda(H) M = \lambda(H) M_0 + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \lambda(H) M_\alpha$$

Les sous-espaces étant supplémentaires, on indentifie terme à terme, ce qui permet d'écrire, pour tout $H \in \mathcal{E}$: $0 = \lambda(H) M_0$, $\alpha(H) M_\alpha = \lambda(H) M_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathcal{R}$. Si $M = M_0$, alors $\lambda(H) = 0$ pour tout H, donc $\lambda = 0$, ce qui est contradictoire. Il existe donc $\alpha \in \mathcal{R}$ tel que $M_\alpha \neq 0$. On a alors $\lambda(H) = \alpha(H)$, ceci pour tout $H \in \mathcal{E}$, donc $\lambda = \alpha$, et finalement $\mathcal{S}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{R}$, cqfd.

III.C.6) a) Rappelons que $[E_{ij}, E_{k\ell}] = \delta_{jk} E_{i\ell} - \delta_{i\ell} E_{kj}$, δ désignant le symbole de Kronecker (égal à 1 si les termes sont égaux, à 0 sinon).
On constate alors $H_\alpha = E_{11} - E_{22} - E_{33} + E_{44} = [E_{12} - E_{43}, E_{21} - E_{34}]$. Posons $X_\alpha = E_{12} - E_{43}$ et $X_{-\alpha} = E_{21} - E_{34}$. On reconnaît les vecteurs directeurs de $\mathcal{A}_\alpha$ et de $\mathcal{A}_{-\alpha}$ déterminés au III.C. D'après

III.B.1a, $[H_\alpha, E_{12}] = 2E_{12}$, $[H_\alpha, E_{21}] = -2E_{21}$, $[H_\alpha, E_{43}] = 2E_{43}$ et $[H_\alpha, E_{34}] = -2E_{34}$. Finalement, $[H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha$ et $[H_\alpha, X_{-\alpha}] = -2X_{-\alpha}$, donc $(X_\alpha, H_\alpha, X_{-\alpha})$ est un triplet admissible.

On a $H_\beta = E_{22} - E_{44} = [E_{24}, E_{42}]$. Posons $X_\beta = E_{24}$ et $X_{-\beta} = E_{42}$. On reconnaît les vecteurs directeurs de $\mathcal{A}_\beta$ et de $\mathcal{A}_{-\beta}$ déterminés au III.C. D'après III.B.1a, $[H_\beta, E_{24}] = 2E_{24}$ et $[H_\beta, E_{42}] = -2E_{42}$, donc $(X_\beta, H_\beta, X_{-\beta})$ est un triplet admissible.

b) Comme les $\mathcal{A}_\alpha$ sont des droites vectorielles, on montre facilement que tout autre couple de triplets admissibles seraient de la forme $(k.X_\alpha, H_\alpha, 1/k.X_{-\alpha}$ et $(k'.X_\beta, H_\beta, 1/k'.X_{-\beta})$, donc le choix fait au III.C.6a ne nuit pas à la généralité.

Rappelons : $X_\alpha = E_{12} - E_{43}$ et $X_{-\alpha} = E_{21} - E_{34}$, $X_\beta = E_{24}$ et $X_{-\beta} = E_{42}$ et notons de même X_λ le vecteur directeur de $\mathcal{A}_\lambda$ donné au III.C.
Alors $[X_\alpha, X_\beta] = E_{14} + E_{23} = X_{e_1+e_2}$ et $[X_{-\alpha}, X_{-\beta}] = E_{41} + E_{32} = X_{-e_1-e_2}$.
De même, $[E_{12} - E_{43}, E_{14} + E_{23}] = 2E_{13} = 2X_{2e1}$ et $[E_{21} - E_{34}, E_{41} + E_{32}] = 2E_{31} = 2X_{-2e_1}$.

Ainsi, si W est un sous-espace de $\mathcal{A}$ stable par crochet, contenant les deux triplets admissibles, contient les vecteurs directeurs de toutes les droites $\mathcal{A}_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{R}$, ainsi que (H_α, H_β) qui est clairement une base de $\mathcal{A}_0$, on a donc $\mathcal{A} \subset W$, cqfd.

NB D'où viennent ces calculs ? Soient $\lambda, \mu \in \mathcal{R}$. On peut appliquer, pour tout $H \in \mathcal{E}$, *l'identité de Jacobi* :

$$[H, [X_\lambda, X_\mu]] + [X_\lambda, [X_\mu, H]] + [X_\mu, [H, X_\lambda]] = 0$$

On en tire : $\Phi_H([X_\lambda, X_\mu]) = (\lambda(H) + \mu(H)).[X_\lambda, X_\mu]$, donc $[X_\lambda, X_\mu] \in \mathcal{A}_{\lambda+\mu}$. Comme les éléments de $\mathcal{R}$ s'écrivent : $\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha+\beta), \pm(2\alpha+\beta)$, il est donc naturel de calculer $[X_\alpha, X_\beta]$ et $[X_\alpha, [X_\alpha, X_\beta]]$, ainsi que leurs transposées (car $\mathcal{A}_{-\lambda}$ est l'image de $\mathcal{A}_\lambda$ par transposition.)