I Polynômes de Tchebychev

I.A-

I.A.1)

a) arccos étant défini sur $[-1,1]$ et cos sur $\mathbb{R}$, par composition F_n est défini sur $[-1,1]$ ainsi

$$\boxed{D = [-1,1].}$$

b) Comme $\cos(\arccos x) = x$ pour tout $x \in D$, par les formules usuelles on obtient :

$$\boxed{F_1(x) = x,\ F_2(x) = 2x^2 - 1 \text{ et } F_3(x) = 4x^3 - 3x}$$

c) Comme $\arccos(1) = 0$,$\arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\arccos(-1) = \pi$, on a donc

$$\boxed{F_n(1) = 0,\ F_n(0) = \cos(n\tfrac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{si n impair} \\ (-1)^p & \text{si } n = 2p \end{cases} \text{ et } F_n(-1) = \cos(n\pi) = (-1)^n}$$

d) $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$ donc $F_n(-x) = \cos(n\pi - n\arccos(x)) = (-1)^n \cos(-\arccos(x)) = (-1)^n F_n(x)$; ainsi

$$\boxed{F_n \text{ a la parité de } n.}$$

I.A.2) Par la formule usuelle $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})$, on a directement :

$$\boxed{\forall x \in D,\ F_{n+1}(x) + F_{n-1}(x) = 2xF_n(x).}$$

I.A.3) Un polynôme est entièrement déterminé par sa restriction à D : si P et Q coïncident sur D, alors $P - Q$ est nul sur D et possède donc une infinité de racines : c'est le polynôme nul soit $P = Q$. Si F_n est la restriction d'une fonction polynomiale à D, cette fonction polynomiale est donc unique.

Soit la suite polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $\widehat{F_0}(x) = 1$ et $\widehat{F_1}(x) = x$ et pour $n \geq 1$ $\widehat{F_{n+1}}(x) = 2x\widehat{F_n}(x) - \widehat{F_{n-1}}(x)$. On remarque que pour $x \in D$, $\widehat{F_0}(x) = F_0(x)$ et $\widehat{F_1}(x) = F_1(x)$; de plus, compte-tenu de la question précédente, si $\forall x \in D, \widehat{F_k}(x) = F_k(x)$ pour tout $k \leq n$, la relation est vraie à l'ordre $n+1$. Ainsi par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N};\ \forall x \in D, \widehat{F_n}(x) = F_n(x).}$$

Dans la suite, $\widehat{F_n}$ sera noté F_n. Une nouvelle récurrence prouve alors la propriété suivante $\mathcal{P}(n)$: F_n est polynomiale de degré n de coefficient dominant 2^{n-1} si $n \geq 1$. Comme $F_0(x) = 1$ et $F_1(x) = x$, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont bien vérifiées. Si on suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n-1)$ vérifiées avec $n \geq 1$, F_{n+1} apparaît comme la somme d'une fonction polynomiale de degré $n+1$ ($x \mapsto 2xF_n(x)$) de coefficient dominant 2.2^{n-1} et d'une fonction polynomiale de degré strictement inférieur ce qui prouve que F_{n+1} est une fonction polynomiale de degré $n+1$ et de coefficient dominant 2^n. On a ainsi montré par récurrence forte que :

$$\boxed{F_n \text{ est polynomiale de degré } n \text{ de coefficient dominant } 2^{n-1} \text{ si } n \geq 1.}$$

Le coefficient dominant de F_0 est 1.

I.A.4) Voici deux méthodes (une récursive et l'autre non)

```
• tchebychev:=proc(n)option remember;
if n=0 then 1
elif n=1 then x
else expand(2*x*tchebychev(n-1)-tchebychev(n-2),x) fi
end;

• tchebychev:=proc(n) local k,a,b,c:
if n=0 then b:=1
   else a:=1:b:=x:
       for k from 2 to n do c:=2*x*b - a : a:=b: b:=simplify(c) end do:
       end if:
b: end proc:
```

I.A.5) En remplaçant dans la relation $\forall x \in \mathbb{R};\ F_{n+2}(x) = 2xF_{n+1}(x) - F_n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ par leur expression en fonction des T_k on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R};\ T_{n+2}(x) = xF_{n+1}(x) - \frac{1}{4}F_n(x)$$

Ainsi

$$\boxed{a = 1 \text{ et } b = -\tfrac{1}{4}}$$

I.B-

I.B.1)

a) F_n étant polynomiale, F_n est $\mathcal{C}^\infty$.

b) $n\arccos$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ de dérivée $x \mapsto \dfrac{-n}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\cos$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de dérivée $-\sin$, par formule de composition , on a donc :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ F_n'(x) = \frac{n\sin(n\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}}$$

I.B.2)

a) Comme $1-\cos(y) \underset{y\to 0^+}{\sim} \frac{y^2}{2}$, en composant par arccos, on a alors $2(1-x) \underset{x\to 1}{\sim} (\arccos x)^2$. Comme $\arccos(x)$ est positif ($\arccos(x) \in [0,\pi]$), en prenant la racine carrée ($u \sim v \Rightarrow \sqrt{u} \sim \sqrt{v}$), on a bien :

$$\boxed{\sqrt{2(1-x)} \underset{x\to 1}{\sim} \arccos(x).}$$

b) Comme $n\arccos(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 1, on a alors :

$$F_n(1) - 1 = \cos(n\arccos(x)) - 1 \sim \frac{-n^2\arccos^2(x)}{2} \underbrace{\sim}_{IB2a} n^2(x-1)$$

F_n étant $\mathcal{C}^1$, il suffit de calculer le nombre dérivé à gauche; d'où

$$\boxed{F_n'(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{F_n(1)-1}{x-1} = n^2}$$

et F_n ayant la parité de n :

$$\boxed{F_n'(-1) = (-1)^{n-1}n^2}$$

I.B.3) Soit $x \in]-1,1[$, En dérivant une nouvelle fois l'expression trouvée en I.B.1.b) comme produit ,on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[,\ F_n''(x) = \frac{-n^2\cos(n\arccos(x))}{1-x^2} + \frac{n\sin(n\arccos(x))}{(1-x^2)^{3/2}}$$

Soit en multipliant par $1-x^2$:

$$(1-x^2)F_n''(x) - xF_n'(x) + n^2F_n(x) = 0$$

La fonction polynomiale $x \mapsto (1-x^2)F_n''(x) - xF_n'(x) + n^2F_n(x)$ étant nulle sur $)-1,1[$, c'est la fonction identiquement nulle. Comme T_n est proportionnelle à F_n, on a de même :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0}$$

I.C-

I.C.1) La fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $]-1,1[$ de plus la fonction $x \mapsto |f(x)g(x)|$ étant bornée sur le segment $[-1,1]$ par M, on a alors :

$$\left|\frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right| \leq \frac{M}{\sqrt{1-x^2}}$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ étant intégrable sur $[-1,1]$ (de primitive bornée sur $]-1,1[$), par comparaison entre fonctions continues, il en est de même de $x \mapsto \dfrac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

I.C.2) φ est trivialement bilinéaire symétrique. De plus $\varphi(f,f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ est l'intégrale d'une fonction **continue** positive sur $]-1,1[$ donc $\varphi(f,f) \geq 0$; de plus $\varphi(f,f) = 0$ si et seulement si $f(x) = 0$ sur $]-1,1[$; f étant polynomiale et ayant une infinité de racines, $f = 0$.

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

I.C.3)

a) Le seul polynôme de degré 0 et de coefficient dominant 1 est $p_0 = 1$. Pour $n \geq 1$, E_n étant de dimension finie, l'orthogonal de E_{n-1} dans E_n est une droite engendrée par un polynôme P_n de $E_n - E_{n-1}$ (donc de degré n) de coefficient dominant a_n ; sur cette droite, il existe un unique polynôme de coefficient dominant $p_n = \dfrac{1}{a_n} P_n$. Ainsi :

$$\boxed{p_n \text{ est l'unique polynôme de coefficient dominant 1 de } E_{n-1}^{\perp} \cap E_n.}$$

b) Si la famille Q_n existe, alors pour tout k, $(Q_0, Q_1, \cdots, Q_k)$ est une famille étagée en degré de polynômes non nuls de E_k : c'est une famille libre maximale donc une base de E_k. La condition (i) équivaut alors pour tout n non nul, Q_n est orthogonal à tout élément de E_{n-1} . Ainsi si la famille $(Q_n)_n$ existe, $\boxed{Q_n = p_n}$. Il est évident que la famille $(p_n)_n$ convient.

I.C.4) Par définition :$(T_m|T_n) = \alpha \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\cos(m \arccos(x)) \cos(n \arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} dx$ où $\alpha = \dfrac{1}{2^{n+m-2}}$ si $nm \neq 0$, $\alpha = \dfrac{1}{2^{n+m-1}}$ si n ou m est nul et 1 si $n = m = 0$.

arccos étant un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de$]-1, 1[$ sur $]0, \pi[$, par théorème de changement de variables dans les intégrales généralisées, le changement de variable $y = \arccos(x)$ conserve l'intégrabilité et :

$$(T_m|T_n) = \alpha \int_0^{\pi} \cos(ny)\cos(my) dy = \frac{\alpha}{2} \int_0^{\pi} \cos((n+m)y) + \cos((n-m)y) dy$$

Or $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(py) dy = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq 0 \\ \pi & \text{si } p = 0 \end{cases}$ donc :

$$\boxed{(T_m|T_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 2^{1-2m}\pi & \text{si } n = m \neq 0 \\ \pi & \text{si } n = m = 0 \end{cases}.}$$

On remarque que :
i) La famille des $(T_n)_n$ est donc orthogonale.
ii) De plus $T_0 = 1$ et comme pour $n \in \mathbb{N}^*$, F_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}, T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 1.
$(T_n)_n$ vérifiant les relations caractérisant la famille $(Q_n)_n$, on obtient :

$$\boxed{\forall n,\ T_n = Q_n}$$

II Inégalités de Bernstein et Markov

II.A-

II.A.1)

a) Soit $f(\theta) = \sin(n\theta) - n\sin(\theta)$ de dérivée $f'(\theta) = n(\cos(n\theta) - \cos(\theta))$. Sur $I_n = [0, \dfrac{\pi}{2n}]$, $0 \leq \theta \leq n\theta \leq \dfrac{\pi}{2}$, et cos étant décroissante sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$, $f'(\theta) \leq 0$. f est donc décroissante sur I_n donc

$$f(\theta) = \sin(n\theta) - n\sin(\theta) \leq f(0) = 0$$

soit

$$\boxed{\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2n}],\ \sin(n\theta) \leq n\sin(\theta)}$$

b) La fonction sin étant concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, la courbe est au dessus de sa corde d'équation $y = \dfrac{2}{\pi}x$, donc

$$\boxed{\forall \theta \in [0, \tfrac{\pi}{2}], \sin(\theta) \geq \frac{2}{\pi}\theta}$$

c) En multipliant l'inégalité précédente par n et en remarquant que si $\theta \geq \frac{\pi}{2n}$, $\frac{2n\theta}{\pi} \geq 1$, on a alors

$$\boxed{\forall \theta \in [\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2}],\ n\sin(\theta) \geq 1}$$

d) Sur I_n, $\sin(n\theta)$ est positif donc $|\sin(n\theta)| \geq n\sin(\theta)$ par a) et comme pour tout $\theta, |\sin(n\theta)| \leq 1$ par c, on obtient $\forall\theta \in [\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2}]$, $|\sin(n\theta)| \leq n\sin(\theta)$; on a donc bien vérifié que

$$\boxed{\forall\theta \in [0, \frac{\pi}{2}],\ |\sin(n\theta)| \leq n\sin(\theta)}$$

e) Il y a bien entendu égalité si $n = 1$ pour tout θ. Si $n > 1$,en a), f est strictement décroissante et il y a égalité si et seulement si $\theta = 0$. Si $n > \frac{\pi}{2n}$, l'inégalité de c) devient stricte : il ne peut pas y avoir égalité.

$$\boxed{\text{il y a égalité pour tout } \theta \text{ si n=1 et seulement pour } \theta = 0 \text{ si } n \geq 2}$$

II.A.2) Compte-tenu de la parité , il suffit d'étudier T'_n sur $[0, 1]$. Soit $\theta = \arccos(x) \in [0, \frac{\pi}{2}]$; compte-tenu de la formule donnant $F'_n(x)$ obtenue en question I.B, on obtient :

$$T'_n(x) = 2^{1-n}F'_n(x) = \begin{cases} 2^{1-n}\dfrac{n\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} & \text{si } x \neq 1 \\ 2^{1-n}n^2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Par le II.A, on a alors

$$\forall x \in [0, 1],\ |T'_n(x)| \leq 2^{1-n}n^2$$

avec égalité pour tout x si $n = 1$ et seulement pour $x = 1$ sinon. Par parité de $|T'_n|$, on a donc :

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1],\ |T'_n(x)| \leq 2^{1-n}n^2}$$

et égalité si n=1 pour tout x et si $n > 1$, égalité pour $x = 1$ ou $x = -1$.

II.A.3) Comme $F_n(1)$ et $F_n(-1)$ sont non nuls, 1 et -1 ne sont pas racines de T_n. Soit $x \in]-1, 1[$ et $\theta = \arccos(x) \in]0, \pi[$.

$$T_n(x) = 0 \iff \cos(n\theta) = 0 \iff n\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$$

les valeurs de k correspondant au domaine d'appartenance de θ. La fonction cos étant strictement décroissante sur $[0, \pi]$, on a bien n racines distinctes sur $]-1, 1[$ et pour ordonner les racines correspondantes dans l'ordre croissant il faut poser $j = n - k$ et on a alors pour $j \in [\![1, n]\!]$

$$\boxed{x_{n,j} = \cos(\tfrac{\pi}{2n} + \tfrac{(n-j)\pi}{n}) = -\cos\left(\tfrac{(2j-1)\pi}{2n}\right)}$$

II.A.4) Par théorème, le nombre de racines de T_n comptées avec leur multiplicité est majoré par n (degré de T_n) ; or on a trouvé précédemment n racines distinctes : ce sont donc les seules racines de T_n et elles sont simples. Comme le coefficient dominant de T_n est 1, on a alors : $T_n(x) = \displaystyle\prod_{j=1}^{n}(x - x_{n,j})$ et $T'_n(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\prod_{k\neq j}(x - x_{n,k})$, on obtient directement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_{n,j}, 1 \leq j \leq n\},\ \frac{T'_n(x)}{T_n(x)} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x - x_{n,j}}}$$

II.A.5)

a) Soit $L_j(x) = \displaystyle\prod_{k\neq j}\frac{(x - x_{n,k})}{(x_{n,j} - x_{n,k})}$ la famille de polynômes de Lagrange associée aux n racines de T_n. Par théorème, cette famille est une base de E_{n-1} et pour tout polynôme de E_{n-1} on a

$$\forall x,\ P(x) = \sum_{j=1}^{n}P(x_{n,j})L_j(x)$$

Or d'après l'expression de T'_n établie précédemment $T'_n(x_{n,j}) = \displaystyle\prod_{k\neq j}(x_{n,j} - x_{n,k})$. ainsi, l'expression de L_j devient, pour x non racine de T_n, $L_j(x) = \dfrac{T_n(x)}{T'_n(x_{n,j})(x - x_{n,j})}$ ce qui donne le résultat demandé :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_{n,j}\}, \forall P \in E_{n-1},\ P(x) = \sum_{j=1}^{n}\frac{P(x_{n,j})T_n(x)}{T'_n(x_{n,j})(x - x_{n,j})}}$$

b) Comme $T_n'(x) = \dfrac{n\sin(n\arccos(x))}{2^{n-1}\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in]-1,1[$ et compte-tenu de $\sin(n\arccos(x_{n,j}) = \sin(\frac{\pi}{2} + (n-j)\pi) = (-1)^{n-j}$, on obtient en remplaçant $T_n'(x_{n,j})$ par sa valeur :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_{n,j}\}, \forall P \in E_{n-1},\ P(x) = \frac{2^{n-1}}{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\sqrt{1-x_{n,j}^2}\,P(x_{n,j})\frac{T_n(x)}{x-x_{n,j}}}$$

II.B- Inégalité de Bernstein

II.B.1) Pour $x \in [-1,1]$,$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ (sin est positive sur $[0,\pi]$)
Pour $x \in [x_{n,1}, x_{n,n}]$, $\arccos(x) \in [\frac{\pi}{2n}, \pi - \frac{\pi}{2n}]$; compte-tenu des variations du sin et du fait que $\sin(\frac{\pi}{2n}) = \sin(\pi - \frac{\pi}{2n})$, on obtient :

$$\boxed{\forall x \in [x_{n,1}, x_{n,n}],\ \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} \geq \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \geq \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2n} = \frac{1}{n}}$$

la dernière inégalité provenant de II.A.1.b.

II.B.2)

a) Comme le suggère le texte on étudie différents cas :
• $x \in [x_{n,1}, x_{n,n}]$. Par hypothèse, $|P(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et par la question précédente, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leq n$ d'où $|P(x)| \leq n$.

• Dans les autres cas, x n'est pas racine de T_n. Par inégalité triangulaire en utilisant l'expression de P obtenue en II.A.5.b), on obtient :

$$|P(x)| \leq \frac{2^{n-1}}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{T_n(x)}{x-x_{n,j}}\right|$$

Dans l'expression de $\dfrac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x-x_{n,j}}$ tous les termes sont négatifs si $x < x_{n,1}$ et positifs si $x > x_{n,n}$. D'où la valeur absolue de la somme est la somme des valeurs absolues et :

$$\frac{|T_n'(x)|}{|T_n(x)|} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{|x-x_{n,j}|}$$

Ainsi $|P(x)| \leq \dfrac{2^{n-1}}{n}|T_n'(x)|$. En utilisant le maximum de T_n' trouvé en question II.A.2, on obtient alors $|P(x)| \leq \dfrac{2^{n-1}}{n}2^{1-n}n^2 = n$.
Les différents cas traités recouvrant bien $[-1,1]$:

$$\boxed{\forall x \in [-1,1], |P(x)| \leq n}$$

b) Si P est nul, c'est trivial et si P est non nul; en posant $\alpha = \sup\limits_{x\in[-1,1]}\sqrt{1-x^2}|P(x)|$ nombre non nul (borne supérieure d'une fonction continue non nulle sur un segment) on applique la question précédente au polynôme $\dfrac{1}{\alpha}P$.

II.B.3)

a) Plusieurs méthodes sont possibles notamment faire le lien avec ce qui précède ou exhiber B_k. (On peut prouver son existence par récurrence mais c'est plus long).
• En dérivant la relation $\cos(k\theta) = F_k(\cos\theta)$ on obtient $k\sin(k\theta) = F_k'(\cos\theta)\sin(\theta)$ ainsi

$$\boxed{B_k = \frac{1}{k}F_k' \text{ convient}}$$

F_k étant de degré k, il est immédiat que B_k est de degré $k-1$.
• Par la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton :

$$\cos(k\theta) + i\sin(k\theta) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(\cos\theta)^{k-j}(i)^j(\sin\theta)^j$$

En prenant la partie imaginaire (donc en ne conservant que les termes impairs de la somme $j = 2p+1$) et en remplaçant $\sin^2(\theta)$ par $1-\cos^2(\theta)$, on obtient après avoir posé $q = E(\frac{k-1}{2})$:

$$\sin(k\theta) = \left(\sum_{p=0}^{q}(-1)^p\binom{k}{2p+1}(\cos\theta)^{k-2p-1}(1-\cos^2(\theta))^p\right)\sin\theta$$

Si on pose $\boxed{B_k = \sum_{p=0}^{q} \binom{k}{2p+1} (X)^{k-2p-1}(X^2-1)^p}$, on obtient bien un polynôme, somme de polynômes de degré $k-1$: c'est donc un polynôme de degré au plus $k-1$; le coefficient de X^{k-1} est $\sum_{p=0}^{q} \binom{k}{2p+1} > 0$ donc le degré de B_k est bien $k-1$.

b) Lorsque θ décrit $\mathbb{R}$, $x = \cos(\theta)$ décrit $[-1,1]$ donc $|\sqrt{1-x^2}P(x)| = |\sin\theta||P(\cos\theta)|$. En utilisant le résultat de II.B.2), on a :

$$\sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| \leq n \sup_{x\in[-1,1]} \sqrt{1-x^2}|P(x)| = n \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |\sin(\theta)||P(\cos\theta)|$$

Or $2|P(\cos\theta)||\sin(\theta)| = |T(\theta_0+\theta) - T(\theta_0-\theta)| \leq 2\sup_{\theta\in\mathbb{R}} |T(\theta)|$ d'où le résultat :

$$\boxed{\sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| \leq n \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |T(\theta)|}$$

c) Lorsque $\sin\theta$ est non nul, on peut poser :

$$\left(\underbrace{\frac{T(\theta_0+\theta)-T(\theta_0)}{\theta}}_{\mapsto T'(\theta_0)} - \underbrace{\frac{T(\theta_0-\theta)-T(\theta_0)}{\theta}}_{\mapsto -T'(\theta_0)}\right)\frac{\theta}{\sin(\theta)} = 2P(\cos(\theta))$$

En faisant tendre θ vers 0, comme P est continue, on trouve alors $2T'(\theta_0) = 2P(1)$.
D'où $|T'(\theta_0)| = |P(1)| \leq \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| \leq n \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |T(\theta)|$. Ceci étant vrai pour tout réel θ_0, on a bien :

$$\boxed{\sup_{\theta\in\mathbb{R}} |T'(\theta)| \leq n \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |T(\theta)|}$$

II.C- Comme le suggère le texte on pose $T(\theta) = P(\cos(\theta)$. T est de la forme donnée en II.B.3 par linéarisation des termes $\cos^k(\theta)$ (pour $k \leq n$, en développant par la formule du binôme $\cos^k(\theta) = \frac{1}{2^k}(\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta})^k$ est donc un polynôme trigonométrique de degré k). Par dérivation de la relation définissant T, on obtient : $T'(\theta) = -\sin(\theta)P'(\cos(\theta)$ soit $|T'(\theta)| = |\sin(\theta)||P'(\cos(\theta)|$. Le résultat de II.B3.d donne alors

$$\forall x \in [-1,1],\ |\sqrt{1-x^2}|P'(x)| \leq n \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |(\theta)| = n \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)|$$

Or P' est élément de E_{n-1} d'où par II.B.2.b :

$$\boxed{\sup_{x\in[-1,1]} |P'(x)| \leq n \sup_{x\in[-1,1]} \sqrt{1-x^2}|P'(x)| \leq n^2 \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)|}$$

III Approximation polynomiale

III.A-

III.A.1) Par définition de $\mathcal{S}$, la suite $(n^{j+2}\alpha_n)_n$ est bornée ; ainsi il existe un nombre M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |n^j\alpha_n| \leq \frac{M}{n^2}$$

Par comparaison à une série de Riemann convergente,

$$\boxed{\text{la série } \sum_n n^j\alpha_n \text{ est absolument convergente donc convergente.}}$$

III.A.2) La suite $(R_n(j))_n$ est bornée comme suite convergeant vers 0 (reste d'une suite convergente).
Soit $k \geq 1$. La suite $(p^{j+k+1}\alpha_p)_p$ étant bornée, il existe M tel que pour pour tout $p \geq 1$, $p^j|\alpha_p| \leq \frac{M}{p^{k+1}}$. La fonction $t \mapsto t^{-k-1}$ étant décroissante, par comparaison série et intégrale $\frac{1}{p^{k+1}} \leq \int_{p-1}^{p} \frac{1}{t^{k+1}}\mathrm{d}t$. La fonction $t \mapsto t^{-k-1}$ étant intégrable sur $[1,+\infty[$, on obtient alors par sommation :

$$\forall n \geq 1,\ |R_n(j)| \leq \int_n^{+\infty} \frac{M}{t^{k+1}}\mathrm{d}t = \frac{M}{k}\frac{1}{n^k}$$

soit $n^k|R_n(j)| \leq M_1$.
Cette relation étant encore vérifiée pour $n = 0$, on a bien vérifié que :

$$\boxed{\text{Pour tout } j,\ (R_n(j))_n \text{ est élément de } \mathcal{S}.}$$

III.B-

III.B.1) Pour $x \in [-1,1]$, on a $|F_n(x)| = |\cos(n \arccos x)| \leq 1$ d'où

$$\forall x \in [-1,1]; |\alpha_n F_n(x)| \leq |\alpha_n|$$

La série $\sum \alpha_n$ étant absolument convergente (question III.A.1) avec $j = 0$), la série $\sum \alpha_n F_n$ est donc normalement convergente sur $[-1,1]$ ainsi

$$\boxed{\text{la série } \sum \alpha_n F_n(x) \text{ est convergente pour tout } x \text{ élément de } [-1,1].}$$

III.B.2) On cherche à utiliser le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions. Les fonctions F_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$. De plus comme F_n est élément de E_n,pour tout entier naturel $k \leq n$, $F_n^{(k)}$ est élément de E_{n-k} donc par l'inégalité de Markov démontrée en partie II.,

$$\sup_{x\in[-1,1]} |F_n^{(k+1)}| \leq (n-k)^2 \sup_{x\in[-1,1]} |F_n^{(k)}| \leq n^2 \sup_{x\in[-1,1]} |F_n^{(k)}|$$

ainsi en utilisant ce résultat p fois, on obtient que pour $p \leq n$,

$$\sup_{x\in[-1,1]} |F_n^{(p)}| \leq n^{2p} \sup_{x\in[-1,1]} |F_n| = n^{2p}$$

Cette dernière relation est encore vraie pour $n \leq p$ puisqu'alors $F_n^{(p)} = 0$. Ainsi

$$\forall x \in [-1,1],\ |\alpha_n F_n^{(p)}(x)| \leq |\alpha_n| n^{2p}$$

La suite majorante étant convergente, pour tout p, la série $\sum_n \alpha_n F_n^{(p)}$ est normalement convergente sur $[-1,1]$. Par théorème,

$$\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^\infty}$$

et ses dérivées sont obtenues par dérivation terme à terme.

III.B.3) Comme $\sum_{p=0}^{n} \alpha_p F_p$ est élément de V_n, par définition d'une borne inférieure :

$$d(f, V_n) \leq \| f - \sum_{p=0}^{n} \alpha_p F_p \|_\infty = \| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \alpha_p F_p \|_\infty$$

Or $|F_n|$ étant majorée par 1 sur $[-1,1]$, on obtient :

$$\| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \alpha_p F_p \|_\infty \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} |\alpha_p| = u_n$$

Comme la suite $(\alpha_n)_n$ est élément de $\mathcal{S}$ équivaut à $(|\alpha_n|)_n$ est élément de $\mathcal{S}$, par la question III.A.2 pour $j = 0$, la suite $(u_n)_n$ est élément de $\mathcal{S}$. Comme pour tout entier k, $n^k d(f, V_n) \leq n^k u_n$,

$$\boxed{\text{la suite } (d(f, V_n))_n \text{ est à décroissance rapide.}}$$

III.C-

III.C.1) $\widetilde{f}$ est $\mathcal{C}^\infty$ comme composée de fonctions indéfiniment dérivables et par relation sur les coefficients de Fourier $a_n(\widetilde{f}^{(2j)}) = (-1)^j n^{2j} a_n(\widetilde{f})$. Comme la suite $a_n(\widetilde{f}^{(2j)}$ est bornée (coefficient de Fourier d'une fonction continue 2π-périodique), on obtient bien que :

$$\boxed{(a_n(\widetilde{f}))_n \text{ est à décroissance rapide.}}$$

$\widetilde{\widetilde{f}}$ étant paire, les coefficients $b_n(f)$ sont nuls.

III.C.2) Par théorème de convergence normale des séries de Fourier, $\widetilde{f}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\boxed{\text{la série de Fourier de } \widetilde{f} \text{ converge normalement vers } \widetilde{f}.}$$

III.C.3) Le résultat précédent s'écrivant

$$\widetilde{f}(\theta) = f(\cos(\theta)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\widetilde{f}) \cos(n\theta)$$

en appliquant à $\theta = \arccos(x)$ on a alors :

$$\forall x \in [-1, 1],\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\widetilde{f}) F_n(x)$$

D'après la question III.C.1, la suite $\alpha_n(f) = a_n(\widetilde{f})$ convient donc :

$$\boxed{\text{pour } n \geq 1,\ \alpha_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos(\theta)) \cos(n\theta) \mathrm{d}\theta \text{ et } \alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos(\theta)) \mathrm{d}\theta}$$

III.D-

III.D.1) Soit $v_n = e^{-n^2}$ suite de réels est élément de $\mathcal{S}$ par croissance comparée de l'exponentielle et des puissances en l'infini. Par définition de $d(f, V_n)$, on a :

$$\boxed{\exists p_n \in V_n,\ d(f, V_n) \leq \parallel f - p_n \parallel_\infty \leq d(f, V_n) + v_n}$$

La somme de deux suites à décroissance rapide étant à décroissance rapide (la somme de deux suites bornées est bornée), la suite $(\parallel f - p_n \parallel_\infty)_n$ est à décroissance rapide et p_n étant élément de V_n , p_n est de degré inférieur ou égal à n.

III.D.2)

a) Pour $k \geq 1$ et P polynomiale, on remarque $a_k(\widetilde{P}) = \dfrac{-(P|T_k)}{\pi}$ par le changement de variables vu en fin de partie II à savoir $\theta = \arccos(x)$. Comme T_k appartient à $E_{k-1}^{\perp}$ si P est élément de E_{k-1} $a_k(\widetilde{P}) = 0$. Par linéarité de $f \mapsto a_n(\widetilde{f})$, on a alors :

$$\boxed{P \in E_{k-1} \Longrightarrow a_k(\widetilde{f}) = a_k(\widetilde{f - P})}$$

b) En utilisant la suite p_n construite en III.D.1, on obtient que $a_k(\widetilde{f}) = a_k(\widetilde{f - p_{k-1}})$. Or par l'inégalité de la moyenne, on a donc

$$|a_k(\widetilde{f})| = |a_k(\widetilde{f - p_{k-1}})| \leq \frac{2\pi \parallel f - p_{k-1} \parallel_\infty}{\pi} = 2 \parallel f - p_{k-1} \parallel_\infty$$

Comme pour tout entier j , il existe M_j tel que $\forall n,\ n^j \parallel f - p_n \parallel_\infty \leq M_j$, on a alors pour $n \geq 2$

$$n^j |a_n(\widetilde{f})| \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^j (n-1)^j 2 \parallel f - p_{n-1} \parallel_\infty \leq 2^{j+1} M_j$$

donc en posant $M'_j = \max(2^{j+1} M_j, \parallel f \parallel_\infty)$, on obtient un majorant de la suite $(n^j |a_n(\widetilde{f})|)_n$ ce qui prouve que

$$\boxed{\text{la suite } (a_n(\widetilde{f}))_n \text{ est à décroissance rapide}}$$

c) Soit $g = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\widetilde{f}) T_n$ fonction bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$d'après la question III.B.1. En introduisant une fonction $\widetilde{g}$ comme en III.C, on obtient alors par le résultat de la question III.C.3 que

$$\forall n, \quad a_n(\widetilde{f}) = a_n(\widetilde{g}) \text{ et } b_n(\widetilde{f}) = b_n(\widetilde{g}) = 0$$

Les fonctions étant continues et l'application qui à une fonction continue associe la suite de ses coefficients de Fourier étant injective, $\widetilde{f} = \widetilde{g}$ et donc leur restrictions à $[-1, 1]$ sont égales d'où $f = g$ ce qui prouve bien que

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty}$$