Corrigé de Centrale 2009 PC math 2

Partie I

I.A On diagonalise f_M dans une base orthonormale $\mathcal{B}'$; on a alors: $(f_M(x), x) = \sum \lambda_i x_i'^2$.

Si $\sigma(M) \subset \mathbb{R}^+$ on obtient $(f_M(x), x) \geqslant 0$: M est positive. Sinon, il existe i tel que $\lambda_i < 0$ et alors $(f_M(e_i'), e_i') = \lambda_i < 0$: M n'est pas positive.

Si $\sigma(M) \subset \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ on obtient $(f_M(x), x) > 0$ pour $x \neq 0$: M est définie positive. Sinon, il existe i tel que $\lambda_i \leqslant 0$ et alors $(f_M(e_i'), e_i') = \lambda_i \leqslant 0$: M n'est pas définie positive.

I.B a) $F(v) = \dfrac{1}{2}(13x_1^2 + 7x_2^2 - 8x_1x_2) - 75x_1 + 75x_2$ est un polynôme donc de classe C^1.

b) $\dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 13x_1 - 4x_2 - 75$ et $\dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 7x_2 - 4x_1 + 75$; on a donc bien $\nabla F(v) = Av - b$.

c) $\det(A) = 75 \neq 0$ donc A est inversible : l'unique point critique est $v = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$.

d) Puisque $13x_1^2 + 7x_2^2 - 8x_1x_2 = 4(x_1 - x_2)^2 + 9x_1^2 + 3x_2^2 > 0$ si $v \neq 0$, la surface est un paraboloide elliptique.

e) F a donc un minimum global atteint au point critique; il vaut $F(3, -9) = -450$.

I.C Remarque: la fonctionnelle J est associée au couple (A, b).

1) Puisque A est symétrique: $(Av, h) = (v, Ah) = (Ah, v)$.

2) a) $R(h) = J(v+h) - J(v) - (Av - b, h) = \frac{1}{2}((Av + Ah, v + h) - (Av, v)) - (b, v + h) + (b, v) - (Av - b, h) = \frac{1}{2}((Ah, h) + (Av, h) + (Ah, v)) - (Av, h) = \frac{1}{2}(Ah, h)$. Puisque A est positive, $R(h)$ est positif ou nul.

b) $J(v_0 + th) - J(v_0) = t(\nabla J(v_0), h) + t^2 R(h) \geqslant 0$. Si $(\nabla J(v_0), h)$ était non nul, $t(\nabla J(v_0), h) + t^2 R(h)$ serait équivalent à $t(\nabla J(v_0), h)$ au voisinage de $t = 0$ et ne serait donc pas toujours positif ou nul; par suite, $(\nabla J(v_0), h) = 0$ pour tout h et donc $\nabla J(v_0) = 0$.

3) a) Puisque A est définie positive, elle n'a pas 0 comme valeur propre et est donc inversible; il existe donc un unique v_0 tel que $Av_0 = b$, $v_0 = A^{-1}b$. Pour h quelconque on a alors $J(v_0 + h) = J(v_0) + R(h) \geqslant J(v_0)$ avec égalité si et seulement si $R(h) = \frac{1}{2}(Ah, h) = 0$, c'est à dire $h = 0$ puisque A est définie positive.

b) Pour tout $\rho \in \mathbb{R}$ on peut écrire: $J(v - \rho d) = J(v) - \rho(\nabla J(v), d) + \frac{1}{2}\rho^2(Ad, d)$. Cela définit une fonction polynôme du second degré $g(\rho)$ avec $g'(\rho) = -(\nabla J(v), d) + \rho(Ad, d)$ qui s'annule pour $\rho = \dfrac{(\nabla J(v), d)}{(Ad, d)}$ (par hypothèse, $d \neq 0$ donc $(Ad, d) > 0$). g a donc un minimum atteint pour l'unique $r = \dfrac{(\nabla J(v), d)}{(Ad, d)} = \dfrac{(Av - b, d)}{(Ad, d)}$.

4) Posons $\alpha = \min(\sigma(A))$ et $m = \max(\sigma(A))$ donc $0 < \alpha \leqslant m$.

$(\nabla J(v) - \nabla J(u), v - u) = (A(v - u), v - u) = \sum \lambda_i (v_i' - u_i')^2$ dans une base orthonormale qui diagonalise A. Par suite, $(\nabla J(v) - \nabla J(u), v - u) \geqslant \sum \alpha(v_i' - u_i')^2 = \alpha||v - u||^2$.

D'autre part, $||\nabla J(v) - \nabla J(u)||^2 = ||A(v - u)||^2 = \sum \lambda_i^2 (v_i' - u_i')^2$ dans la même base orthonormale, d'où $||\nabla J(v) - \nabla J(u)||^2 \leqslant \sum m^2(v_i' - u_i')^2 = m^2||v - u||^2$ donc $||\nabla J(v) - \nabla J(u)|| \leqslant m||v - u||$.

5) Pour tout h, $J(u_0 + h) = J(u_0) + \frac{1}{2}(Ah, h) \geqslant J(u_0)$ avec égalité si et seulement si $(Ah, h) = 0$. De $(Ah, h) = \sum \lambda_i h_i'^2$ on déduit que $(Ah, h) = 0$ si et seulement si $h_i' = 0$ quand $\lambda_i \neq 0$, autrement dit si et seulement si $h \in \mathrm{Ker}(A)$. L'ensemble des vecteurs v_0 est donc le sous-espace affine $u_0 + \mathrm{Ker}(A)$.

Partie II

II.A 1) $||Mx||_\infty = \max\limits_i |\sum\limits_j m_{i,j}x_j|$. Or $|\sum\limits_j m_{i,j}x_j| \leqslant \sum\limits_j |m_{i,j}||x_j| \leqslant \sum\limits_j |m_{i,j}|||x||_\infty$ donc $N_\infty(M) \leqslant \max\limits_i \sum\limits_j |m_{i,j}|$. Il y a en fait égalité pour x choisi tel que, si le max est obtenu pour i_0, $x_j = 1$ si $m_{i_0,j} \geqslant 0$ et -1 si $m_{i_0,j} < 0$.

2) a) Si N est une norme subordonnée, on a pour tout x: $\nu(Mx) \leqslant N(M)\nu(x)$. Par suite, $\nu(ABx) \leqslant N(A)\nu(Bx) \leqslant N(A)N(B)\nu(x)$ et donc $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$. On en déduit par récurrence immédiate que pour $k \in \mathbb{N}^*$: $N(A^k) \leqslant (N(A))^k$.

b) Soit λ une valeur propre de M; il existe $x \neq 0$ tel que $Mx = \lambda x$ d'où $\dfrac{\nu(Mx)}{\nu(x)} = |\lambda|$ qui est donc inférieur ou égal à $N(M)$. Par suite $\rho(M) = \sup(|\lambda_i|) \leqslant N(M)$.

3) a) Si $M' = P_\alpha^{-1}MP_\alpha$ on a $m'_{i,j} = \dfrac{1}{\alpha^{i-1}}m_{i,j}\alpha^{j-1} = m_{i,j}\alpha^{j-i}$.

b) $\sum\limits_j |m_{i,j}\alpha^{j-i}| = |m_{i,i}| + \sum\limits_{j>i} |m_{i,j}|\alpha^{j-i} \leqslant \rho(M) + \sum\limits_{j>i} |m_{i,j}|\alpha^{j-i}$ car $\rho(M) = \max\limits_i |m_{i,i}|$.
Pour tout $i < n$ on a $\lim\limits_{\alpha \mapsto 0} \sum\limits_{j>i} |m_{i,j}|\alpha^{j-i} = 0$; on peut donc choisir $\alpha > 0$ tel que pour tout i: $\sum\limits_{j>i} |m_{i,j}|\alpha^{j-i} \leqslant \varepsilon$ et par suite on a bien $N_\infty(P_\alpha^{-1}MP_\alpha) = \max\limits_i \sum\limits_j |m_{i,j}\alpha^{j-i}| \leqslant \rho(M) + \varepsilon$.

4) a) Toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable donc il existe P inversible telle $P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure. On applique le 3)a) pour obtenir $N_\infty(P_\alpha^{-1}P^{-1}MPP_\alpha) \leqslant \rho(M)+\varepsilon$.

b) Il suffit de poser $N(M) = N_\infty(P_\alpha^{-1}P^{-1}MPP_\alpha)$: N est la norme subordonnée à la norme $\nu(x) = ||(PP_\alpha)^{-1}x||_\infty$ car
$$\sup_x \frac{\nu(Mx)}{\nu(x)} = \sup_x \frac{||(PP_\alpha)^{-1}Mx||_\infty}{||(PP_\alpha)^{-1}x||_\infty} = \sup_y \frac{||(PP_\alpha)^{-1}MPP_\alpha y||_\infty}{||y||_\infty} = N_\infty(P_\alpha^{-1}P^{-1}MPP_\alpha).$$

5) Supposons la condition (i) vérifiée. Soit λ une valeur propre de M et y_0 un vecteur non nul tel que $My_0 = \lambda y_0$. Choisissons $x'_0 = x_0+y_0$: $f(x'_0)-f(x_0) = M(x'_0-x_0) = \lambda y_0$ et par récurrence immédiate $x'_k - x_k = M^k(x'_0 - x_0) = \lambda^k y_0$. Comme les suites (x'_k) et (x_k) convergent vers la même limite, la suite $(x'_k - x_k)$ converge vers 0; puisque $y_0 \neq 0$, la suite (λ^k) converge vers 0. On a donc $|\lambda| < 1$ et par suite $\rho(M) < 1$. Cela entraine que 1 n'est pas valeur propre de M et donc $I - M$ est inversible.

Supposons maintenant la condition (ii) vérifiée. Puisque $(I - M)$ est inversible il existe un unique d tel que $(I-M)d = c$ donc $f(x) - d = Mx + c - c - Md = M(x - d)$ et par récurrence $x_k - d = M^k(x_0 - d)$. Puisque $\rho(M) < 1$ on peut choisir $\varepsilon < 1 - \rho(M)$ et il existe une norme subordonnée N telle que $N(M) \leqslant \rho(M) + \varepsilon < 1$. On en déduit que $N(M^k) \leqslant N(M)^k$ qui a pour limite 0 et donc la suite M^k converge vers la matrice nulle. La suite (x_k) a donc pour limite le vecteur $d = (I - M)^{-1}(c)$ qui est bien indépendant de x_0.

II.B 1) ϕ est bilinéaire, symétrique (S symétrique entraine que $(Su, v) = (u, Sv)$), et enfin définie positive puisque S est définie positive ($(Su, u) > 0$ si $x \neq 0$).

2) Soit $u = S^{-1}Ax \in \mathrm{Im}(S^{-1}A)$ et $v \in \mathrm{Ker}(A)$: $\phi(u, v) = (SS^{-1}Ax, v) = (Ax, v) = (x, Av)=0$ puisque A est symétrique et $Av = 0$; $\mathrm{Im}(S^{-1}A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ sont bien orthogonaux. Puique S est inversible, S^{-1} est une bijection de $\mathrm{Im}(A)$ sur $\mathrm{Im}(S^{-1}A)$ donc $\dim(\mathrm{Im}(S^{-1}A)) = \dim(\mathrm{Im}(A)) = n - \dim(\mathrm{Ker}(A))$. $\mathrm{Im}(S^{-1}A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ sont donc supplémentaires orthogonaux pour ϕ.

3) Puisque $b = Ax_0$, $Au = b \Leftrightarrow A(x_0 - u) = 0 \Leftrightarrow x_0 - u \in \mathrm{Ker}(A)$. Le vecteur x_0 se décomposant de manière unique $x_0 = u' + v'$ sur $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(S^{-1}A) \oplus \mathrm{Ker}(A)$, u' est bien l'unique vecteur de $\mathrm{Im}(S^{-1}A)$ tel que $Au' = b$. L'ensemble des solutions de $Au = b$ est le sous-espace affine $u' + \mathrm{Ker}(A)$.

4) a) $u_{k+1} = u_k - \gamma S^{-1}\nabla J(u_k) = u_k - \gamma S^{-1}(Au_k - b) = u_k - \gamma S^{-1}A(u_k - x_0)$ donc $u_{k+1} - u_k \in \mathrm{Im}(S^{-1}A)$. La composante de u_k sur $\mathrm{Ker}(A)$ est donc la même que celle de u_0.

b) $u'_{k+1} - u'_k = u_{k+1} - u_k = -\gamma S^{-1}A(u_k - x_0) = -\gamma S^{-1}A(w + u'_k - x_0) = -\gamma S^{-1}A(u'_k - x_0)$ donc $f(x) = x - \gamma S^{-1}A(x - x_0) = (I - \gamma S^{-1}A)x + \gamma S^{-1}Ax_0$.

c) Soit λ une valeur propre complexe de $S^{-1}A$. Il existe $X \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que $S^{-1}AX = \lambda X$ d'où $AX = \lambda SX$ et ${}^t\bar{X}AX = \lambda {}^t\bar{X}SX$. Posons $X = X_1 + \mathrm{i}\, X_2$:
${}^t\bar{X}AX = {}^t(X_1 - \mathrm{i}\, X_2)A(X_1 + \mathrm{i}\, X_2) = {}^t X_1AX_1 + {}^t X_2AX_2 + \mathrm{i}\,({}^tX_1AX_2 - {}^tX_2AX_1)$. Comme ${}^t({}^tX_2AX_1) = {}^t X_1AX_2$ et ${}^tX_1AX_1 + {}^t X_2AX_2 \geqslant 0$ (A est positive) on a ${}^t\bar{X}AX \in \mathbb{R}^+$.
De même, ${}^t\bar{X}SX = {}^t X_1SX_1 + {}^t X_2SX_2 > 0$ puisque S est définie positive et X_1 ou X_2 est non nul. On en déduit que $\lambda = \dfrac{{}^t\bar{X}AX}{{}^t\bar{X}SX} \in \mathbb{R}^+$.

d) g est par définition un endomorphisme de $\mathrm{Im}(S^{-1}A)$.
De plus, $\mathrm{Ker}(g) = \{x \in \mathrm{Im}(S^{-1}A)/S^{-1}Ax = 0\} = \{x \in \mathrm{Im}(S^{-1}A)/Ax = 0\} = \mathrm{Im}(S^{-1}A) \cap \mathrm{Ker}(A) = \{0\}$. g est donc un automorphisme de $\mathrm{Im}(S^{-1}A)$.

e) Les valeurs propres complexes de g sont des valeurs propres de $S^{-1}A$, elles sont donc dans $\mathbb{R}^+$; par suite, le polynôme caractéristique de g est scindé sur $\mathbb{R}$ et celui de $id - \gamma g$ aussi. Puisque g est inversible, ses valeurs propres vérifient $0 < \lambda \leqslant \Lambda_n$, celles de γg vérifient $0 < \lambda \leqslant \gamma\Lambda_n < 2$ et celles de $id - \gamma g$ sont donc dans $]-1, 1[$: le rayon spectral de $id - \gamma g$ est strictement inférieur à 1.

f) La suite (u'_k) est définie par $u'_{k+1} = f(u'_k) = (id - \gamma g)(u'k) + c$ avec $c = \gamma S^{-1}Ax_0$. Puisque $\rho(id - \gamma g) < 1$, la question II.A.5 entraine que la suite (u'_k) converge dans $\mathrm{Im}(S^{-1}A)$ vers une limite u' indépendante de u'_0.

g) Par continuité de $id - \gamma g$ on a $u' = (id - \gamma g)(u') + c$ donc $\gamma g(u') = c$, $\gamma S^{-1}Au' = \gamma S^{-1}Ax_0$ et enfin $Au' = Ax_0 = b$.

Partie III

III.A 1) On doit supposer $d_k \neq 0$. Puisque A est définie positive on peut appliquer le I.C.3b) et alors $r_k = \dfrac{(Au_k - b, d_k)}{(Ad_k, d_k)} = \dfrac{(d_k, d_k)}{(Ad_k, d_k)}$. On en déduit: $(d_{k+1}, d_k) = (Au_{k+1} - b, d_k) = (Au_k - r_kAd_k - b, d_k) = (Au_k - b, d_k) - r_k(Ad_k, d_k) = 0$.

2) Appliquons le I.C.2a): $J(u_k) - J(u_k - r_kd_k) = -(\nabla J(u_k), -r_kd_k) - \dfrac{1}{2}r_k^2(Ad_k, d_k) = r_k(d_k, d_k) - \dfrac{1}{2}r_k^2(Ad_k, d_k) = \dfrac{1}{2}r_k^2(Ad_k, d_k)$. Le I.C.4 donne alors: $(Ad_k, d_k) \geqslant \alpha||d_k||^2$ avec $\alpha = \min(\sigma(A))$; donc $J(u_k) - J(u_{k+1}) \geqslant \dfrac{\alpha}{2}||d_k||^2r_k^2 = \dfrac{\alpha}{2}||u_{k+1} - u_k||^2$.

3) On a donc $J(u_k) - J(u_{k+1}) \geqslant 0$: la suite $(J(u_k))$ est décroissante; elle est de plus minorée (par le I.C.3a) donc elle converge. L'inégalité précédente entraine alors que $||u_{k+1} - u_k||$ converge vers 0.

4) Puisque $(d_{k+1}, d_k) = 0$, $||d_{k+1} - d_k||^2 = ||d_{k+1}||^2 + ||d_k||^2 \geqslant ||d_k||^2$ donc $||d_k|| \leqslant ||d_{k+1} - d_k||$. $||d_{k+1} - d_k|| = ||A(u_{k+1} - u_k)|| \leqslant N(A)||u_{k+1} - u_k||$ a pour limite 0 donc d_k aussi.

5) Avec le I.C.4, $(\nabla J(u_k), u_k - v_0) = (\nabla J(u_k) - \nabla J(v_0), u_k - v_0) \geqslant \alpha||u_k - v_0||^2$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne: $\alpha||u_k - v_0||^2 \leqslant (d_k, u_k - v_0) \leqslant ||d_k|| \times ||u_k - v_0||$ d'où $||u_k - v_0|| \leqslant \dfrac{1}{\alpha}||d_k||$ qui tend vers 0. La suite (u_k) converge vers v_0.

III.B 1) $d_k = Au_k = \begin{pmatrix} x_k \\ cy_k \end{pmatrix}$. $r_k = \dfrac{(d_k, d_k)}{(Ad_k, d_k)} = \dfrac{x_k^2 + c^2y_k^2}{x_k^2 + c^3y_k^2}$ donc $u_{k+1} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_ky_k^2c^2(c-1)}{x_k^2 + c^3y_k^2} \\ \dfrac{x_k^2y_k(1-c)}{x_k^2 + c^3y_k^2} \end{pmatrix}$. Les composantes de ce vecteur sont non nulles puisque x_k , y_k , c et $c - 1$ sont non nuls.

2) $t_k = \dfrac{y_k}{x_k}$ et $t_{k+1} = \dfrac{-x_k}{c^2y_k}$ donc $t_kt_{k+1} = \dfrac{-1}{c^2}$.

3) On en déduit que $t_{k+2} = t_k$ donc $\dfrac{x_{k+2}}{x_k} = \dfrac{y_{k+2}}{y_k}$. Les vecteurs u_{k+2} et u_k sont proportionnels. $\dfrac{x_{k+1}}{x_k} = \dfrac{t_k^2c^2(c-1)}{1 + c^3t_k^2}$ donc $\dfrac{x_{k+2}}{x_k} = \dfrac{t_k^2t_{k+1}^2c^4(c-1)^2}{(1 + c^3t_k^2)(1 + c^3t_{k+1}^2)} = \dfrac{(c-1)^2}{(1 + c^3(t_k^2 + t_{k+1}^2) + c^2)}$.
C'est une valeur constante car $t_k^2 + t_{k+1}^2$ est constant. $c^2(t_k^2 + t_{k+1}^2) = c^2t_k^2 + \dfrac{1}{c^2t_k^2} \geqslant 2$ donc $\dfrac{x_{k+2}}{x_k} \leqslant \dfrac{(c-1)^2}{(1 + 2c + c^2)} = \left(\dfrac{c-1}{c+1}\right)^2 < 1$. (u_k) converge donc vers 0 (solution de $Au = 0$).