MATHÉMATIQUES II

Préliminaires et notations :

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. K désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- $K[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans K.
- L'espace $\mathbb{R}^n$ sera si nécessaire muni de son produit scalaire canonique, et rapporté à la base canonique qui est orthonormale.

Partie I -

On rappelle que $E = K^n$ est un espace vectoriel sur K de dimension n pour les lois usuelles. On munit de plus E d'une multiplication notée $\times$ et définie par :

Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dans E, $x \times y = (x_1 \cdot y_1, \ldots, x_n \cdot y_n)$.

I.A - Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ fixé dans E. Pour $P \in K[X]$, on notera :

$$P(x) = (P(x_1), \ldots, P(x_n)).$$

I.A.1) Vérifier que $\Phi : P \mapsto P(x)$ est une application linéaire de $K[X]$ vers E, telle que $\Phi(P \cdot Q) = \Phi(P) \times \Phi(Q)$ pour tout $P, Q \in K[X]$.

I.A.2) Montrer que $A_x = \{P(x), P \in K[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Montrer que A_x est stable pour $\times$, c'est-à-dire que, si $y, z \in A_x$ alors $y \times z \in A_x$.

I.A.3) On suppose ici $x_i \neq x_j$ pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$.

On note $K_{n-1}[X]$ l'ensemble des polynômes de $K[X]$ dont le degré est inférieur ou égal à $n - 1$.

Montrer que la restriction de Φ à $K_{n-1}[X]$ est injective.

Montrer que A_x est de dimension n.

I.B - Soit $y = (y_1, \ldots, y_n)$ donné dans E, ainsi que $P \in K[X]$ fixé de degré ≥ 1.

On s'intéresse à l'ensemble noté $R_{y,P}$: $R_{y,P} = \{x \in E / P(x) = y\}$.

I.B.1) Montrer que si $K = \mathbb{C}$, $R_{y,P}$ n'est jamais vide.

I.B.2) Montrer que si $K = \mathbb{R}$, $R_{y,P}$ peut être vide : donner un exemple.

I.B.3) On suppose $K = \mathbb{C}$, et $P(X) = X^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer le cardinal de $R_{y,P}$, noté $\mathrm{Card}(R_{y,P})$, en fonction de p et de $m_y = \mathrm{Card}(\{i \in [\![1, n]\!] / y_i \neq 0\})$.

Filière PC

I.B.4) D'une façon générale, donner un majorant de $\mathrm{Card}(R_{y,P})$ en fonction de n et du degré de P.

I.C - Pour Γ partie non vide de E, et $P \in K[X]$ fixé de degré ≥ 1, on s'intéresse à l'ensemble noté $R_{\Gamma,P} = \{x \in E / P(x) \in \Gamma\}$.

I.C.1) Exemple 1 : On prend $K = \mathbb{R}$, $n = 2$, $P(X) = X^2$. Déterminer et dessiner Γ et $R_{\Gamma,P}$, dans chacun des cas suivants :

i) $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + y = 1\}$,

ii) $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x - y = 1\}$,

iii) $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 = 1\}$.

I.C.2) Exemple 2 : On prend $K = \mathbb{R}$, $n = 3$, $P(X) = X^2$. Déterminer et donner la nature géométrique de Γ et $R_{\Gamma,P}$, dans chacun des deux cas suivants :

i) $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 1\}$,

ii) $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y = 1\}$.

I.C.3) Exemple 3 : On prend $K = \mathbb{R}$, $n = 2$, $P(X) = X^3 - X$ et soit :

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x - y = 0\}.$$

Déterminer et dessiner Γ et $R_{\Gamma,P}$.

I.D - Pour cette question, on pourra utiliser sur E la norme infinie définie par :

$$\text{si } x = (x_1, \ldots, x_n) \text{ est dans } E,\ \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| .$$

I.D.1) On suppose que Γ est de cardinal fini. Donner un majorant de $\mathrm{Card}(R_{\Gamma,P})$ en fonction de $\mathrm{Card}\,(\Gamma)$, de n et du degré de P.

I.D.2) Si Γ est borné, montrer que $R_{\Gamma,P}$ est borné. Lorsque $K = \mathbb{R}$, donner un exemple pour lequel Γ est non borné et $R_{\Gamma,P}$ est borné. Lorsque $K = \mathbb{C}$, si $R_{\Gamma,P}$ est borné, montrer que Γ est borné.

Partie II -

Soit V un espace vectoriel sur K de dimension finie $N \geq 1$ et $\mathscr{L}(V)$ l'espace vectoriel sur K des endomorphismes de V, qui est aussi muni de la loi de composition $\circ$.

On note id_V l'application identité de V dans V.

II.A - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leq N$.

On considère n projecteurs non nuls $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de $\mathcal{L}(V)$ tels que :

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = \mathrm{id}_V \text{, et } p_i \circ p_j = 0 \text{ pour tout } i, j \in [\![1, n]\!] \text{ tels que } i \neq j.$$

On pose $\mathcal{A} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} x_k p_k / (x_1, \ldots, x_n) \in K^n \right\}$.

II.A.1) Montrer que $\mathcal{A}$ est un K-espace vectoriel de dimension n, stable pour $\circ$.

II.A.2) Montrer que l'application Ψ de E vers $\mathcal{A}$, définie par :

$$\Psi : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$$

est un isomorphisme tel que, pour tout $x, y \in E$, $\Psi(x \times y) = \Psi(x) \circ \Psi(y)$.

II.A.3) Montrer que, pour tout $x \in E$ et $P \in K[X]$, $\Psi(P(x)) = P(\Psi(x))$.

II.B - Soit $f \in \mathcal{A}$, avec $f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k p_k$, où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$.

On suppose $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$.

II.B.1) Soit $g \in \mathcal{A}$ avec $g = \sum_{k=1}^{n} \mu_k p_k$, et $P \in K[X]$.

Montrer que $g = P(f)$ si et seulement si $P(\lambda_k) = \mu_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

II.B.2) Montrer que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe $P_j \in K[X]$ tel que $p_j = P_j(f)$.

II.B.3) Montrer que f est diagonalisable, et préciser ses valeurs propres.

II.C - Soit $f \in \mathcal{L}(V)$ supposé diagonalisable. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres distinctes et on pose $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Pour $P \in K[X]$ donné, on note $R_{f,P} = \{ g \in \mathcal{L}(V) / f = P(g) \}$.

II.C.1) Donner n projecteurs non nuls $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = \mathrm{id}_V, \; p_i \circ p_j = 0 \text{ pour tout } i, j \in [\![1, n]\!] \text{ tels que } i \neq j \text{, et } f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k p_k.$$

On dispose ainsi de l'application Ψ définie en II.A.

II.C.2) Soit $g \in R_{f,\,P}$.

Montrer que $f \circ g = g \circ f$.

Montrer que chaque sous-espace $V_j = \ker(f - \lambda_j \mathrm{id}_V)$ est stable par g, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.

On suppose que g est diagonalisable. Montrer qu'il existe une base de vecteurs propres pour f et propres pour g.

II.C.3) Montrer que $\Psi(R_{\lambda,\,P}) \subset R_{f,\,P}$ et que, si toutes les valeurs propres de f sont simples, on a l'égalité $\Psi(R_{\lambda,\,P}) = R_{f,\,P}$.

On suppose que $K = \mathbb{C}$ et que $P(X) = X^r$ avec $r \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le cardinal de $R_{f,\,P}$ lorsque toutes les valeurs propres de f sont simples.

II.C.4) On suppose que $K = \mathbb{C}$ et que $P(X) = X^r$ avec $r \in \mathbb{N}$ et $r \geq 2$.

Lorsque $N \geq 2$, montrer que $R_{\mathrm{id}_V,\,P}$ est de cardinal infini.

Montrer que $R_{f,\,P}$ est de cardinal infini si et seulement si f admet au moins une valeur propre multiple.

II.C.5) On suppose que $K = \mathbb{C}$ et que $P(X) = X^r$ avec $r \in \mathbb{N}^*$.

Si l'on suppose que les complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont tous non nuls, montrer que si $g \in R_{f,\,P}$, alors g est diagonalisable.

Si l'on suppose que $\lambda_1 = 0$ et que $g \in R_{f,\,P}$, montrer que g est diagonalisable si et seulement si f et g ont le même rang.

II.D - Exemple 4 : On prend $K = \mathbb{R}$, et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice dans la base canonique :

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Déterminer, par leur matrice G dans la base canonique, toutes les applications $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, telles que $g^2 = f$.

Partie III -

Dans cette partie on considère un espace vectoriel euclidien V de dimension $N \geq 1$, muni d'un produit scalaire noté $\langle .,. \rangle$, la norme euclidienne associée étant notée $\|.\|$.

On note $O(V)$ le groupe (pour la loi $\circ$) des automorphismes orthogonaux de V.

On note de plus $S(V)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de V.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$ donné. Pour $f \in \mathscr{L}(V)$, on s'intéresse à $R_r(f) = \{g \in \mathscr{L}(V) / f = g^r\}$ et aux sous-ensembles $S(V) \cap R_r(f)$ ou $O(V) \cap R_r(f)$.

III.A -

III.A.1) Montrer que si $S(V) \cap R_r(f)$ est non vide alors $f \in S(V)$.

III.A.2) On suppose ici que r est pair et $f \in S(V)$. Montrer que $S(V) \cap R_r(f)$ est non vide si et seulement si toutes les valeurs propres de f sont dans $\mathbb{R}_+$.

III.A.3) On suppose ici que r est impair et $f \in S(V)$. Montrer que $S(V) \cap R_r(f)$ est non vide et est réduit à un seul élément.

III.A.4) Exemple 5 :

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Déterminer toutes les matrices $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$.

Déterminer toutes les matrices $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ symétriques telles que $B^3 = A$.

III.B -

III.B.1) Montrer que si $O(V) \cap R_r(f)$ est non vide, alors $f \in O(V)$.

III.B.2) Soit $g \in O(V)$. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de V stable par g, il en est de même de son orthogonal $F^\perp$.

III.B.3) On suppose ici $N = 2$ et V orienté, et on suppose que f est la rotation d'angle de mesure θ, avec $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer $O(V) \cap R_r(f)$.

III.B.4) Exemple 6 :

Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Déterminer toutes les matrices $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $B^2 = A$.

Déterminer toutes les matrices $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ orthogonales telles que $B^2 = A$.

III.C - Soit F un sous-espace vectoriel de V de dimension m, et f la symétrie orthogonale par rapport à F.

III.C.1) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur r et m pour que $R_r(f)$ soit non vide, et exhiber dans ce cas un élément $g \in O(V) \cap R_r(f)$.

III.C.2) Étudier $S(V) \cap R_r(f)$.

III.D - On suppose ici que $N = 3$, et on considère l'espace euclidien $V = \mathbb{R}^3$ orienté, muni de son produit scalaire canonique, la base canonique étant orthonormale directe.

Soir $r \in \mathbb{N}^*$, et soit f la rotation d'angle de mesure θ, avec $\theta \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$, d'axe $D = \mathbb{R}u$, où $\|u\| = 1$; $f \neq \mathrm{id}_V$.

III.D.1) Déterminer $O(V) \cap R_r(f)$.

III.D.2) Déterminer $O(V) \cap R_r(-f)$.

III.D.3) Exemple 7 :

Déterminer, par leur matrice dans la base canonique, toutes les rotations g de V, telles que g^3 soit la rotation d'axe dirigé par $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

••• FIN •••
