MATHÉMATIQUES II

Dans ce problème, les figures ou les commentaires, même non demandés, qui éclaireraient les situations ou les hypothèses rencontrées seront les bienvenus.

Dans tout le problème, on désigne par $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, par (C) le cercle centré en O et de rayon donné R, $R > 0$, et par A_1, A_2 et A_3 les points de coordonnées respectives $(R, 0)$, $(0, R)$ et $(-R, 0)$.

Partie I - Un exemple pratique

Dans cette partie, on désigne par (E) la courbe d'équation $4x^2 + 5y^2 - 4Ry = 0$.

I.A - Montrer que (E) est une ellipse. En déterminer deux axes de symétrie et un centre de symétrie.

I.B - Étudier le signe de l'expression $(4x^2 + 5y^2 - 4Ry) - 4(x^2 + y^2 - R^2)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En déduire les positions relatives de (E) et (C).

I.C -

I.C.1) Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse de représentation paramétrique $(x = a\cos\theta, y = b\sin\theta)$, où a et b sont deux réels non nuls et où le paramètre θ décrit $\mathbb{R}$. Montrer que la droite (D) d'équation $y = mx + m'$ rencontre $(\mathcal{E})$ en un point unique si et seulement si il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{(mx + m')^2}{b^2} = 1 \\ \dfrac{x}{a^2} + m\dfrac{mx + m'}{b^2} = 0 \end{cases}$$

En déduire que, dans ce cas, (D) est tangente à $(\mathcal{E})$.

I.C.2) En se ramenant à la question précédente, montrer que, si dans $\mathcal{P}$ une droite coupe une ellipse en un seul point, elle lui est tangente. Est-ce encore le cas pour une parabole ? Pour une hyperbole ?

I.C.3) Montrer que les droites d'équation $x + y = R$ et $-x + y = R$ sont tangentes à (E) en des points que l'on précisera. Tracer soigneusement (C) et (E), ainsi que ces deux droites.

Filière PC

I.D - On considère l'arc paramétré défini par :

$$\overrightarrow{OM(t)} = R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\,\vec{i} + \frac{2t}{1+t^2}\,\vec{j}\right), \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que l'on définit ainsi une bijection de $\mathbb{R}$ sur une partie (γ) de (C) que l'on précisera. Si t est réel, on dira que t est le *paramètre* du point $M(t)$.

I.E - Soit t et u deux réels. Montrer que $(1-p)x + sy - R(1+p) = 0$ est une équation de la droite $(M(t)M(u))$, si l'on a posé $s = t+u$ et $p = tu$.

Si $t = u$, la notation $(M(t)M(u))$ désignera cette fois la tangente en $M(t)$ à (γ). On admettra sans le vérifier que l'équation trouvée convient encore dans ce cas.

I.F -

I.F.1) Soit M un point de (γ), de paramètre t. Montrer que, sauf dans un cas particulier à préciser, son symétrique orthogonal $\widehat{M}$ par rapport à $(O;\vec{j})$ est un point de (γ) ; en exprimer le paramètre, noté $\hat{t}$.

Si A_0 désigne le point de coordonnées $(R, 2R)$, montrer que, lorsque $t \neq 1$, la droite $(A_0\widehat{M})$ recoupe (γ) au point de paramètre $\frac{1}{1-t}$ (*on pourra utiliser les résultats* de I.E.).

I.F.2)

Dans le cas particulier où $t \neq 1$ et $u = \frac{1}{1-t}$, on pose toujours $s = t+u$ et $p = tu$. Montrer que la droite $(M(t)M(u))$ est tangente à (E) (*on pourra exprimer* $(p+1)s$ *en fonction de* p *seulement et utiliser les résultats de* I.C.2.).

I.F.3) En utilisant les questions qui précèdent, montrer que, si un point A de (C) est distinct des points A_1, A_2 et A_3 définis dans le préambule, alors une construction géométrique simple, que l'on détaillera, permet de construire deux autres points A' et A'' de (C) tels que les côtés du triangle $AA'A''$ soient tangents à (E). Étudier le cas des points A_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

I.G - Récapituler les résultats de cette partie à l'aide d'une figure.

Partie II - Correspondances algébriques

Soit P une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$(x, y) \mapsto P(x, y) = u_{1,1}x^2 + 2u_{1,2}xy + u_{2,2}y^2 + v_1 x + v_2 y + w$$

où les coefficients $u_{i,j}$, v_i et w sont des réels.
On lui associe la relation $\mathscr{R}$ définie sur $(\gamma) \times (\gamma)$ par

$$M(t)\mathscr{R}M(u) \Leftrightarrow P(s, p) = 0$$

où l'on a posé $s = t + u$ et $p = tu$. On dira que $\mathscr{R}$ est une 2-*correspondance* si $u_{1,1}$, $u_{1,2}$ et $u_{2,2}$ ne sont pas tous les trois nuls, et une 1-*correspondance* si $u_{1,1} = u_{1,2} = u_{2,2} = 0$, mais v_1 et v_2 non tous nuls.

II.A - Exemple de 1- correspondance

Soit A un point donné de $\mathscr{P}$, différent de A_3. Montrer que la relation sur $(\gamma) \times (\gamma)$ définie par $M(t)\mathscr{R}M(u) \Leftrightarrow A \in (M(t)M(u))$ est une 1-correspondance. Donner un exemple simple de 1- correspondance qui ne soit pas de cette forme.

II.B - Exemple de 2- correspondance

Soit (Γ) le cercle de centre Ω de coordonnées $(\alpha, 0)$ et de rayon r, $r > 0$ donnés.

II.B.1) Si (D) est la droite d'équation $ax + by = c$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$, donner une expression du carré de la distance de Ω à (D), noté $d^2(\Omega, D)$.

II.B.2) En déduire que, si t et u sont des réels, la droite $(M(t)M(u))$ est tangente à (Γ) si et seulement si

$$((R+\alpha)^2 - r^2)p^2 - r^2 s^2 + 2(R^2 + r^2 - \alpha^2)p + (R-\alpha)^2 - r^2 = 0$$

puis que cela définit ici une 2- correspondance.

II.C - Si $\mathscr{R}$ est une 1- correspondance, montrer que l'ensemble des $t \in \mathbb{R}$ tels que $M(t)\mathscr{R}M(t)$ est fini (ou vide). Montrer que cette propriété tombe en défaut pour une 2- correspondance et une seule.

Pour fournir certains des exemples demandés dans la partie qui suit, les candidats *pourront* mettre à profit l'exemple II.B en choisissant de façon adéquate le cercle (Γ).

Partie III - L'alternative de Poncelet

Le but de cette partie est l'étude de l'existence, étant donné une 2-correspondance $\mathscr{R}$ vérifiant quelques propriétés supplémentaires, de paramètres réels (distincts ou non) t_1, t_2, t_3 et t_4 formant un 4-*cycle* pour $\mathscr{R}$, c'est-à-dire tels que $M(t_i)\mathscr{R}M(t_{i+1})$ pour $1 \le i \le 3$ et $M(t_4)\mathscr{R}M(t_1)$.

III.A - Comment interpréter géométriquement un 4-cycle dans le cas où $\mathscr{R}$ est la 2-correspondance définie à la question II.B.2 ? Montrer par un choix de (Γ) qu'il peut y avoir une infinité de solutions, et qu'il peut n'y avoir aucune solution.

III.B -

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$V(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 .$$

III.B.1) t et u étant réels, à quelle condition la famille $\{V(t), V(u)\}$ est-elle liée dans $\mathbb{R}^3$?

III.B.2) Soit P, Q, $R \in \mathbb{R}_2[X]$; on pose :

$$W(t) = \begin{pmatrix} P(t) \\ Q(t) \\ R(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Montrer qu'il existe $\mathscr{A} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ unique telle que $W(t) = \mathscr{A}V(t)$ pour tout réel t.

III.B.3) Caractériser à l'aide de $\mathscr{A}$ la liberté de la famille $\{P, Q, R\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$. En déduire que si $\{P, Q, R\}$ est libre, alors la famille $\{W(t), W(u)\}$ est libre si et seulement si $t \neq u$.

III.B.4)

a) On suppose, jusqu'à la fin de ce III.B, que $\{P, Q, R\}$ est de rang 2.

Montrer que $\mathscr{A}$ admet 0 comme valeur propre et en déduire qu'il existe trois réels a, b, c tels que

$$\{W(t), W(u)\} \text{ liée } \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & t^2 & u^2 \\ b & t & u \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

b) Montrer que ce déterminant est égal à $(t-u)(a-bs+cp)$, avec $s = t+u$ et $p = tu$.

Établir alors le résultat suivant, vrai sauf pour des valeurs particulières de (a, b, c) que l'on mettra en évidence :

> Il existe une 1-correspondance $\mathscr{R}_0$ telle que, chaque fois que les réels t et u vérifient $M(t)\mathscr{R}_0M(u)$, la famille $\{W(t), W(u)\}$ est liée.

III.C - On considère une 2-correspondance de la forme

$$M(t)\mathscr{R}M(u) \Leftrightarrow P(s, p) = Ap^2 + 2Bps + Cs^2 + 2Dp + 2Es + F = 0$$

où A, B et C sont des réels non tous nuls, D, E et F des réels, et où p et s désignent encore tu et $t+u$.

III.C.1) Écrire $P(s, p)$ sous la forme $P_1(t)u^2 + 2P_2(t)u + P_3(t)$, où P_1, P_2 et P_3 sont dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exemple 1. Lorsque $P(s, p) = s^2 - 4p$, déterminer P_1, P_2 et P_3 ainsi que le rang de la famille $\{P_1,\ P_2,\ P_3\}$.

Exemple 2. On considère, pour ce seul exemple, deux réels α et β strictement positifs tels que $\alpha^2 + \beta^2 = R^2$ et on pose $P(s, p) = \alpha^2(1-p)^2 + \beta^2s^2 - R^2(1+p)^2 = 0$. Montrer que $\{P_1,\ P_2,\ P_3\}$ vérifie les hypothèses du III.B.4-a) puis déterminer la 1-correspondance définie comme dans le III.B.4-b).

III.C.2)

Montrer que si, pour $u_2 \in \mathbb{R}$, l'équation en u : $P_1(u_2)u^2 + 2P_2(u_2)u + P_3(u_2) = 0$ possède deux solutions réelles (distinctes ou non) u_1 et u_3, alors on a $M(u_1)\mathscr{R}M(u_2)$ et $M(u_2)\mathscr{R}M(u_3)$.

III.C.3)

a) On pose $\Delta(t) = P_2^2(t) - P_1(t)P_3(t)$.

Montrer, par un exemple, qu'il est possible que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Delta(t) < 0$, ou que $\Delta(t) < 0$ sauf en un point. Que penser dans chacun de ces cas de l'existence de 4-cycles ?

On suppose maintenant qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$, supposé choisi, tel que $\Delta(t_0) > 0$. On suppose en outre que $P_1(t_0) \neq 0$ (ce qui, en fait, ne restreint nullement la généralité recherchée).

b) Montrer qu'il existe alors un intervalle ouvert non vide $\mathscr{I}_0$ en tout point duquel $\Delta(t) > 0$ et $P_1(t) \neq 0$.

c) En conclure que si la famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ est libre, il n'existe aucun 4- cycle formé de paramètres distincts.

d) Si la famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ est de rang 2, montrer qu'il existe une 1- correspondance $\mathscr{R}_0$ telle que, chaque fois que l'on a $t_1 \in \mathscr{I}_0$ et $M(t_1)\mathscr{R}_0 M(t_2)$, il existe u_1 et u_2 tels que t_1, u_1, t_2, u_2 soit un 4- cycle. Peut-on alors faire en sorte que ces quatre paramètres soient distincts ?

III.C.4)

a) Dans le cas de l'exemple de II.B, montrer que l'hypothèse du III.B.4-a) quant au rang de $\{P, Q, R\}$ équivaut à

$$(R^2 - \alpha^2)((R^2 - \alpha^2)^2 - 2r^2(R^2 + \alpha^2)) = 0 .$$

b) Que signifie la condition $R^2 - \alpha^2 = 0$? Indiquer une construction géométrique de 4- cycles dans le cas où elle est vérifiée. Prouver géométriquement que cette construction convient.

••• FIN •••
