

# MATHÉMATIQUES II

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ , dont les coefficients sont des entiers naturels. On note  $a_{ij}$  le coefficient de  $A$  appartenant à la  $i$ -ème ligne et à la  $j$ -ème colonne de  $A$ .

On suppose que  $A$  est *symétrique* et que les coefficients de la diagonale principale de  $A$  sont égaux à 1.

On désigne par  $M$  la matrice réelle, carrée, d'ordre  $n$ , de coefficient  $m_{ij}$ , définie par :

$$m_{ij} = \begin{cases} -\cos\left(\frac{\pi}{a_{ij}}\right) & \text{si } a_{ij} \neq 0 \\ -1 & \text{si } a_{ij} = 0 \end{cases}$$

On remarque que  $M$  est symétrique et que les coefficients de sa diagonale principale valent 1.

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension  $n$  et  $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$  une base donnée de  $E$ .

Pour chaque entier  $i$  compris entre 1 et  $n$ , on désigne par  $\sigma_i$  l'endomorphisme de  $E$  caractérisé par :

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \sigma_i(e_j) = e_j - 2m_{ij}e_i.$$

On note  $\tau$  l'endomorphisme de  $E$  donné par :

$$\tau = \sigma_1 \circ \sigma_2 \dots \circ \sigma_n.$$

où  $\circ$  désigne la composition des applications.

On désigne par  $S_i$  et  $T$  les matrices associées aux endomorphismes  $\sigma_i$  et  $\tau$  dans la base  $\mathcal{B}$  et par  $I$  la matrice unité d'ordre  $n$  associée à l'identité (notée  $Id$ ).

## Partie I - Étude du cas $n = 2$

Dans cette partie I, on suppose  $n = 2$  et on pose :

$$a = a_{12} = a_{21} \text{ et } m = m_{12} = m_{21}.$$

### I.A -

I.A.1) Expliciter  $M$  en fonction de  $m$  puis en fonction de  $a$ .

I.A.2) Donner en fonction de  $m$  les matrices  $S_1$ ,  $S_2$  et  $T$ .

# Filière PC

**I.B** - On suppose dans cette question I.B que  $a \in \{0,1\}$  et donc que  $|m| = 1$ .

I.B.1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $\tau$

I.B.2) La matrice  $T$  est-elle diagonalisable ? (Justifier la réponse).

I.B.3) Diagonaliser ou trigonaliser, si possible, la matrice  $T$ .

I.B.4) Montrer que  $\tau$  est d'ordre infini (c'est à dire qu'il n'existe pas d'entier naturel strictement positif  $k$  tel que  $\tau^k = Id$ , où  $\tau^k = \tau \circ \tau \circ \dots \circ \tau$  désigne la puissance  $k$ -ième de  $\tau$  pour la loi de composition).

**I.C** - On suppose dans cette question I.C, que  $a$  est supérieur ou égal à 2, et donc que  $|m| < 1$ .

On définit la forme bilinéaire  $\phi$  sur  $E \times E$  par :

$$\phi(xe_1 + ye_2, x'e_1 + y'e_2) = xx' + yy' + m(xy' + yx'), \text{ pour tous } x, x', y, y' \text{ réels.}$$

I.C.1) Montrer que  $\phi$  est un produit scalaire.

Muni de ce produit scalaire,  $E$  est un plan euclidien, que nous noterons aussi  $E$ .

I.C.2) Pour quelle valeur de  $a$  la base  $\mathcal{B}$  est-elle orthonormale ?

I.C.3) Montrer que les sous-espaces propres de  $\sigma_1$  sont orthogonaux.

I.C.4) Montrer que  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont des symétries orthogonales en précisant par rapport à quelles droites vectorielles.

I.C.5) Montrer que  $\tau$  est une rotation et déterminer une mesure en radians de l'angle de cette rotation, en supposant la base  $\mathcal{B}$  directe.

I.C.6) En déduire que  $\tau$  est d'ordre  $a$ , c'est-à-dire que  $a$  est le plus petit entier strictement positif  $k$  tel que  $\tau^k = Id$ .

**I.D** - On suppose dans cette question que  $a \in \{2, 3, 4, 6\}$ .

I.D.1) Dans chacun des cas  $a = 2, 3, 4, 6$ , déterminer un réel  $\mu_a$ ,  $1 \leq \mu_a < 2$ , tel que les matrices associées à  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  relativement à la base  $(e_1, \mu_a e_2)$ , aient tous leurs coefficients dans  $\mathbb{Z}$ .

I.D.2) Dans chacun des cas  $a = 2, 3, 4, 6$ , faire une figure soignée où l'on indiquera  $e_1$  et  $f_2 = \mu_a e_2$ , ainsi que leurs images par  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . On représentera le plan euclidien  $E$  de façon usuelle, c'est-à-dire que des vecteurs orthogonaux seront représentés par des flèches perpendiculaires et des vecteurs de même norme par des flèches de même longueur.

## Partie II - Étude du cas général

Dans cette partie  $n$  désigne un entier quelconque supérieur ou égal à 2.

### II.A -

#### II.A.1)

- a) Pour  $i$  compris entre 1 et  $n$ , calculer  $\sigma_i(e_i)$ .
- b) Exprimer  $\sigma_i^2 = \sigma_i \circ \sigma_i$  en fonction de l'identité.
- c) Montrer que  $E = \text{Ker}(\sigma_i - Id) \oplus \text{Ker}(\sigma_i + Id)$ .

II.A.2) On pose  $\varepsilon_1 = e_1$  et, pour tout  $k \in \{2, \dots, n\}$ ,  $\varepsilon_k = \sigma_1 \circ \sigma_2 \dots \sigma_{k-1}(e_k)$ .

- a) Montrer par récurrence sur  $i < k$ , que, pour tout  $k \in \{2, \dots, n\}$ , on a :

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 \dots \sigma_i(e_k) = e_k - 2 \sum_{1 \leq j \leq i} m_{jk} \varepsilon_j.$$

- b) Vérifier que la famille  $\mathcal{F} = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une base de  $E$ .

#### II.A.3)

- a) Exprimer  $\tau(e_n)$  en fonction de  $\varepsilon_n$ .
- b) Montrer que pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  on a :

$$\tau(e_k) = -\varepsilon_k - 2 \sum_{j=k+1}^n m_{jk} \varepsilon_j.$$

II.A.4) Soit  $C$  la matrice carrée d'ordre  $n$ , triangulaire supérieure, dont les coefficients  $c_{ij}$  sont donnés par :

$$c_{ij} = \begin{cases} 2m_{ij} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{si } i \geq j \end{cases}$$

On notera  ${}^t C$  la matrice transposée de la matrice  $C$ .

On désigne par  $P$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{F}$ .

- a) Exprimer  $P^{-1}$  en fonction de  $C$ .
- b) Montrer que :

$$T = -(I + C)^{-1}(I + {}^t C).$$

- c) En déduire que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\det(\lambda I - T) = \det((\lambda + 1)I + \lambda C + {}^t C).$$

**II.B** - Soient  $i, j$  vérifiant :  $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i \neq j$  ; on note  $E_{ij}$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $e_i$  et  $e_j$ .

II.B.1)

a) Montrer que  $\dim E_{ij} = 2$ .

b) Montrer que  $E_{ij}$  est stable par  $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_i \circ \sigma_j$  et  $\sigma_j \circ \sigma_i$ .

On note  $\pi_{ij}$  et  $\pi_{ji}$  les restrictions de  $\sigma_i \circ \sigma_j$  et  $\sigma_j \circ \sigma_i$  à  $E_{ij}$ .

c) Donner les matrices  $\Pi_{ij}$  et  $\Pi_{ji}$  associées à  $\pi_{ij}$  et  $\pi_{ji}$  relativement à la base  $(e_i, e_j)$  de  $E_{ij}$ .

d) Vérifier que  $\Pi_{ij}$  et  $\Pi_{ji}$  sont inverses l'une de l'autre. Pouvaient-on prévoir ce résultat ?

II.B.2)

a) Montrer que, si pour tous  $i$  et  $j$  on a  $a_{ij} \in \{0, 1\}$ , alors  $\pi_{ij}$  et  $\pi_{ji}$  sont d'ordre infini.

b) Quels sont les ordres de  $\pi_{ij}$  et  $\pi_{ji}$  lorsque  $a_{ij} \geq 2$  ?

**II.C** - On suppose dans cette section que :

i)  $n \geq 3$

ii)  $a_{ij} = 2$  pour  $1 < |i - j| < n - 1$

iii)  $\{a_{12}, a_{23}, \dots, a_{(n-1)n}, a_{n1}\} \subset \{3, 4, 6\}$ .

On pose  $\beta_n = 2m_{1n}$  et  $\beta_i = 2m_{i(i+1)}$  pour  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ .

On désigne par  $p$  (resp.  $q$ ) le nombre de couples  $(i, j)$ ,  $i < j$ , tels que  $a_{ij} = 4$  (resp.  $a_{ij} = 6$ ).

II.C.1) Montrer que si  $p$  et  $q$  sont pairs, alors il existe un  $n$ -uplet de réels  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  tel que les matrices de tous les  $\sigma_k$ , pour  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , relativement à la base  $(v_1 e_1, v_2 e_2, \dots, v_n e_n)$ , ont leurs coefficients dans  $\mathbb{Z}$ .

II.C.2)  $\det(\lambda I - T)$  est un polynôme réel en  $\lambda$ , de degré  $n$ , que l'on écrira  $\det(\lambda I - T) = \sum \alpha_k \lambda^k$ .

a) Justifier que  $\alpha_n = 1$  et  $\alpha_{n-1} = -\text{tr } T$ , où  $\text{tr } T$  désigne la trace de  $T$ .

b) Calculer, pour  $n = 3$ ,  $\det(\lambda I - T)$  en fonction de  $\lambda, \beta_1, \beta_2$  et  $\beta_3$ .

c) Montrer que

$$\alpha_{n-1} = n - \sum_{1 \leq i \leq n} \beta_i^2 + (-1)^{n+1} \beta_1 \dots \beta_n$$

(on pourra utiliser la question II.A.4 et démontrer la relation par récurrence sur  $n$ ).

II.C.3)

a) Montrer que, s'il existe une base de  $E$  dans laquelle toutes les matrices des  $\sigma_k$  ont tous leurs coefficients entiers, alors la trace de  $\tau$  est un entier.

b) Montrer que si  $p$  est impair ou  $q$  est impair, alors la trace de  $\tau$  est irrationnelle.

c) Montrer qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle les matrices de tous les  $\sigma_k$  ont tous leurs coefficients entiers si et seulement si  $p$  et  $q$  sont pairs.

### Partie III - Un exemple dans le cas de $n = 3$

On suppose dans cette partie que  $n = 3$  et que :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

**III.A** - Peut-on trouver une base de  $E$  dans laquelle les matrices de  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  ont tous leurs coefficients entiers ?

**III.B** - On définit la forme bilinéaire  $\Phi$  sur  $E \times E$  par :

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^3 x_i e_i, \sum_{j=1}^3 y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 m_{ij} x_i y_j$$

pour tous  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$  réels.

III.B.1) Vérifier que  $\Phi$  est un produit scalaire.

On considérera donc  $E$  comme un espace vectoriel euclidien muni de ce produit scalaire.

III.B.2) Donner une équation cartésienne de l'orthogonal, pour  $\Phi$ , du vecteur  $ae_1 + be_2 + ce_3$  en fonction de  $a, b, c$ .

**III.C -**

III.C.1) Pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ , déterminer les sous-espaces  $F_i = \text{Ker}(\sigma_i - Id)$  et  $G_i = \text{Ker}(\sigma_i + Id)$ .

III.C.2) En déduire que les  $\sigma_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , sont des symétries orthogonales par rapport à des plans (ou réflexions) de  $E$ .

**III.D -** Montrer que les  $\sigma_i \circ \sigma_j$ , pour  $1 \leq i, j \leq 3$ , sont des rotations et les caractériser.

**III.E -**

III.E.1) Que peut-on dire de  $\tau = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$  ?

III.E.2) Déterminer la matrice  $T$ .

Déterminer un vecteur non nul  $u$  de norme 1 tel que  $\tau(u) = -u$ , puis une base directe de  $E$ , de premier vecteur  $u$ , orthonormale pour  $\Phi$ ,  $\mathcal{S} = (u, v, w)$ .

III.E.3) Montrer que  $\tau$  est la composée d'une rotation d'axe  $\mathbb{R}u$ , dont on précisera l'angle et de la symétrie orthogonale par rapport au plan  $(\mathbb{R}u)^\perp$ .

Donner l'ordre de la matrice  $T$ , c'est-à-dire le plus petit entier  $k > 0$  tel que  $T^k = I$ .

---

••• FIN •••

---