Centrale 2005 PC 2
Éléments de correction

Partie I - Étude du cas $n = 2$

I.A.1) $M = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$ où $m = \begin{cases} -\cos(\pi/a) & \text{si } a \neq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$.

I.A.2) $\sigma_1(e_1) = e_1 - 2e_1 = -e_1, \sigma_1(e_2) = e_2 - 2me_1$ d'où $S_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
De même $S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2m & -1 \end{pmatrix}$. Puis $T = S_1 \times S_2 = \begin{pmatrix} -1+4m^2 & 2m \\ -2m & -1 \end{pmatrix}$.

I.B *Dans cette partie* $m = \pm 1$

I.B.1) Si $m = 1$, on aura $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. $\chi_T(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$. $\mathrm{Sp}(\tau) = \mathrm{Sp}(T) = \{1\}$.
$E_1(\tau) = \ker(\tau - Id)$ est une droite d'équation $x + y = 0$.
Si $m = 1$ les vecteurs propres de τ sont les vecteurs non nuls colinéaires à $e_1 - e_2$.
Si $m = -1$, on aura $T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$...(c'est la transposée de la précedente)... $\mathrm{Sp}(T) = \{1\}$ et on trouve :
Si $m = -1$ les vecteurs propres de τ sont les vecteurs non nuls colinéaires à $e_1 + e_2$.

I.B.2) La matrice n'est pas diagonalisable car il y a un seul espace propre qui est de dimension 1 alors que la matrice est carrée d'ordre 2...
Remarque : On peut aussi dire qu'il y a une seule valeur propre et que τ n'est pas une homothétie...

I.B.3) On ne peut pas diagonaliser.
Posons $e'_1 = e_1 + e_2$ et $e'_2 = e_1 - e_2$. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible donc la famille (e'_1, e'_2) est bien une base de E et :
si $m = -1$ alors $\tau(e'_1) = e'_1, \tau(e'_2) = 5e_1 - 3e_2 = 4e'_1 + e'_2$ d'où $T' = P^{-1}TP = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Remarque : Les calculatrices étant autorisées, on peut bêtement recopier le résultat du calcul matriciel $P^{-1}TP$.
Si $m = 1$, on trouve... $T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

I.B.4) Méthode 1 : Par l'absurde. S'il existait un $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\tau^k = Id$. On aurait un polynôme annulateur scindé à racines simples donc τ serait diagonalisable. Contradiction car T ne l'est pas.
Méthode 2 : En partant de $T' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (l'autre cas est "identique"), on a facilement par exemple par récurrence $T'^k = \begin{pmatrix} 1 & 4k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $T'^k \neq 0$ et $\tau^k \neq 0$.
Donc τ est d'ordre infini.

I.C) $|m| < 1$

I.C.1) Démonstration en section PC :
- on vérifie que Φ est une forme bilinéaire symétrique [...]
- reste à vérifier qu'elle est définie-positive :

$\Phi(xe_1 + ye_2, xe_1 + ye_2) = x^2 + y^2 + 2mxy = (x + my)^2 + (1 - m^2)y^2$.

Comme $1-m^2>0$, on a $\Phi(xe_1+ye_2,xe_1+ye_2)\geqslant 0$ et égalité ssi $x+my=0$ et $y=0$ càd $x=0$ et $y=0$.
Finalement Φ est bien un produit scalaire.
Remarque pour d'autres sections (PSI par exemple) : la matrice associée à la forme quadratique est $\begin{pmatrix}1 & m\\ m & 1\end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont $1-m>0$ et $1+m>0$ donc on a un produit scalaire.

I.C.2) $\Phi(e_1,e_1)=1,\Phi(e_2,e_2)=1,\Phi(e_1,e_2)=m$.
$\boxed{\text{La base est orthonormale si, et seulement si, } m=0 \text{ ssi } a=2.}$

I.C.3) Souvenons-nous que $S_1=\begin{pmatrix}-1 & -2m\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
$\boxed{\text{Les valeurs propres de cette matrice triangulaire sont 1 et } -1.}$
Pour $E_1(\sigma_1)$ on trouve la droite d'équation $x+my=0$ dirigée par $-me_1+e_2$.
$E_{-1}(\sigma_1)$ est elle dirigée par e_1.
$\Phi(e_1,-me_1+e_2)=-m+0+m(1+0)=0$. Les deux vecteurs sont orthogonaux.
$\boxed{\text{Les sous-espaces propres de } \sigma_1 \text{ sont des droites orthogonales (au sens de } \Phi).}$

I.C.4) Le 3) montre que σ_1 est la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $x+my=0$ dirigée par $u_1=-me_1+e_2$.
On montre de même que σ_2 est la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $mx+y=0$ dirigée par $u_2=e_1-me_2$.

I.C.5) La composée de ces deux réflexions du plan est donc une rotation.
Considérons la base $\mathcal{B}_1=(e_1,u_1)$. $\begin{vmatrix}1 & -m\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1>0$. C'est une base directe. On a vu qu'elle est orthogonale que e_1 est de norme 1. $\Phi(u_1,u_1)=m^2+1-2m^2=1-m^2$.
En notant θ une mesure de l'angle orienté de la rotation on a :
$\tau(e_1)=\cos(\theta)e_1+\sin(\theta)\dfrac{1}{\sqrt{1-m^2}}u_1$.
Mais par ailleurs on sait (première colonne de la matrice T) que $\tau(e_1)=(4m^2-1)e_1-2me_2$.
En identifiant les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ on obtient :
$\sin(\theta)=-2m\sqrt{1-m^2},\cos(\theta)=-1+2m^2$.
Or $m=-\cos(\pi/a)$ avec $\pi/a\in]0,\pi/2[$ donc :
$\sin(\theta)=+2\cos(\pi/a)\sin(\pi/a)=+\sin(2\pi/a),\cos(\theta)=-1+2\cos^2(\pi/a)=\cos(2\pi/a)$.
Remarque : On pouvait aussi obtenir les cosinus/sinus par des produits scalaires, par exemple $\cos\theta=\Phi(e_1,\tau(e_1))$...

$$\boxed{\tau \text{ est la rotation d'angle } 2\pi/a.}$$

I.C.6) τ^k est donc la rotation d'angle $2k\pi/a$. τ^k est l'identité ssi k est un multiple de a.

L'ordre de τ est donc a.

I.D.1) $S_1=\mathrm{mat}_{(e_1,e_2)}(\sigma_1)=\begin{pmatrix}-1 & -2m\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $S_1'=\mathrm{mat}_{(e_1,\mu e_2)}(\sigma_1)=\begin{pmatrix}-1 & -2m\mu\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
$S_2=\mathrm{mat}_{(e_1,e_2)}(\sigma_2)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2m & -1\end{pmatrix}$, $S_2'=\mathrm{mat}_{(e_1,\mu e_2)}(\sigma_2)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2m/\mu & -1\end{pmatrix}$.
On cherche μ tel que $2m\mu\in\mathbb{Z}$ et $2m/\mu\in\mathbb{Z}$ et $1\leqslant\mu<2$.
Si $a=2,m=0$, on peut choisir $\mu_2=1$ ([...])
Si $a=3,m=-\cos(\pi/3)=1/2$, d'où $\boxed{\mu_3=1}$.
Si $a=4,m=-\cos(\pi/4)=-\sqrt{2}/2$, d'où $\boxed{\mu_4=\sqrt{2}}$.

Si $a = 6, m = -\cos(\pi/6) = -\sqrt{3}/2$, d'où $\boxed{\mu = \sqrt{3}}$.

I.D.2) *J'avoue ne pas saisir l'intérêt de cette question et j'ai la flemme de faire en tex les quatre figures demandées...*

II.A.
II.A.1) Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$:
a) $\sigma_i(e_i) = -e_i$.
b) On vérifie en testant σ_i^2 sur les vecteurs de base $e_1, \ldots, e_n$ que $\sigma_i^2 = Id$.
c) σ_i est donc une symétrie . On sait alors que $E = \mathrm{Ker}(\sigma_i - Id) \oplus \mathrm{Ker}(\sigma_i + Id)$.

II.A.2)
Pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, notons $\mathcal{P}(i)$ la propriété :

$$\forall k \in \{i+1, \ldots, n\}, \quad \sigma_1 \circ \sigma_2 \ldots \sigma_i(e_k) = e_k - 2\sum_{j=1}^{i} m_{j,k}\,\varepsilon_j.$$

Par définition de σ_1, $\forall k \in \{2, \ldots, n\}, \quad \sigma_1(e_k) = e_k - 2m_{1,k}\,e_1$ et $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.
Supposons $\mathcal{P}(i)$ vérifiée pour un certain $i \in \{1, \ldots, n-2\}$.
Pour tout $k \in \{i+2, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned}
\sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_i \circ \sigma_{i+1}(e_k) &= \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_i(e_k - 2m_{i+1,k}e_{i+1}) \\
&= \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_i(e_k) - 2m_{i+1,k}\,\varepsilon_{i+1}) \\
&= e_k - 2\sum_{j=1}^{i} m_{j,k}\varepsilon_j - 2m_{i+1,k}\varepsilon_j \quad \text{par hypothèse de récurrence car } i < k \\
&= e_k - 2\sum_{j=1}^{i+1} m_{j,k}\varepsilon_j
\end{aligned}$$

$\mathcal{P}(i+1)$ est établie. On en déduit par récurrence que $\mathcal{P}(i)$ est vérifiée pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

b) En particulier, pour tout $k \in \{2, \ldots, n-1\}$, on obtient:

$$\varepsilon_k = \sigma_1 \circ \ldots \sigma_{k-1}(e_k) = e_k - 2\sum_{j=1}^{k-1} m_{j,k}\,\varepsilon_j$$

On en déduit que pour tout $k \in \{2, \ldots, n-1\}$, $e_k \in \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$. C'est encore vrai pour $k = 1$ car $e_1 = \varepsilon_1$. Comme $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une famille génératrice de E. Elle est de cardinal $n = \dim(E)$, il s'agit donc d'une base de E.

II.A.3)
a) Comme $\sigma_n(e_n) = -e_n$, $\tau(e_n) = -\varepsilon_n$.
b) Soit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$
Montrons par récurrence sur $h \in \{k, \ldots, n-1\}$ que

$$\tau(e_k) = (\sigma_1 \circ \ldots \sigma_h)(e_k) - 2\sum_{j=h+1}^{n} m_{jk}\varepsilon_j$$

• Pour $h = n-1$:
$\tau(e_k) = \sigma_1 \circ \ldots \sigma_{n-1}(\sigma_n(e_k)) = \sigma_1 \circ \ldots \sigma_{n-1}(e_k - 2m_{n,k}e_n) = \sigma_1 \circ \ldots \sigma_{n-1}(e_k) - 2m_{n,k}\varepsilon_n$
La propriété est vraie pour $h = n-1$.

• Supposons le résultat vrai pour un certain $h \in \{k+1, \ldots, n-1\}$.

$$\begin{aligned}
\tau(e_k) &= \sigma_1 \circ \dots \sigma_h(e_k) - 2\sum_{j=h+1}^{n} m_{j,k}\varepsilon_j \quad \text{par hypothèse de récurrence}\\
&= \sigma_1 \circ \dots \sigma_{h-1}(e_k - 2m_{h,k}e_h) - 2\sum_{j=h+1}^{n} m_{j,k}\varepsilon_j\\
&= \sigma_1 \circ \dots \sigma_{h-1}(e_k) - 2\sum_{j=h}^{n} m_{j,k}\varepsilon_j
\end{aligned}$$

La récurrence est établie, en particulier pour $h = k$, on obtient :

$$\tau(e_k) = \sigma_1 \circ \dots \sigma_k(e_k) - 2\sum_{j=k+1}^{n} m_{jk}\varepsilon_j = -\varepsilon_k - 2\sum_{j=k+1}^{n} m_{j,k}\varepsilon_j$$

II.A.4)
a) Notons $P^{-1} = (q_{i,j})_{(1\leq i,j\leq n}$.

Comme $e_1 = \varepsilon_1$ et pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$, $e_k = \varepsilon_k + \sum_{j=1}^{k-1} 2m_{j,k}\varepsilon_j$, la matrice P^{-1} est triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux tous égaux à 1 et

$$\forall k \in \{2, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, k-1\}, \quad q_{j,k} = 2m_{j,k}$$
$$\boxed{P^{-1} = I + C}$$

b)
D'après II.A.3, la matrice de τ relativement aux bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\tau(e_1), \dots, \tau(e_n)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{B}}(\tau) = -(I + {}^tC)$$

On déduit alors de la relation de Chasles que :
$T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\tau(e_1), \dots, \tau(e_n)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\tau(e_1), \dots, \tau(e_n))$.
C'est à dire :

$$T = -P(I + {}^tC) = -(I + C)^{-1}(I + {}^tC)$$

c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, comme $\det(I + C) = 1$,
$\det(\lambda I - T) = \det(I + C)\det(\lambda I - T) = \det((I + C)(\lambda I - T))$
Or $(I + C)(\lambda I - T) = \lambda(I + C) + I + {}^tC = (1 + \lambda)I + \lambda C + {}^tC$

$$\det(\lambda I - T) = \det((1 + \lambda)I + \lambda C + {}^tC)$$

II. B.
II. B.1)
a) Comme (e_i, e_j) est un système libre de vecteurs de E, le sous espace vectoriel $E_{i,j}$ engendré par ces deux vecteurs est de dimension 2
une question aussi immédiate à cet endroit est un peu étrange...

b) On sait que pour h et k dans $\{1, \dots, n\}$, $\sigma_h(e_k) = e_k - 2m_{hk}e_h$
On en déduit que pour $h \in \{i, j\}$, $\sigma_h(e_i)$ et $\sigma_h(e_j)$ appartiennent à $E_{i,j}$.
Comme (e_i, e_j) est une famille génératrice de $E_{i,j}$, $E_{i,j}$ est stable par σ_i et σ_j et donc aussi par les composées $\sigma_i \circ \sigma_j$ et $\sigma_j \circ \sigma_i$.

c) En utilisant les calculs effectués en I.A.2 avec ici $m = m_{i,j} = m_{j,i}$, on obtient

$$\Pi_{i,j} = \begin{pmatrix} 4m_{i,j}^2 - 1 & 2m_{i,j} \\ -2m_{i,j} & -1 \end{pmatrix} \qquad \Pi_{j,i} = \begin{pmatrix} -1 & -2m_{i,j} \\ 2m_{i,j} & 4m_{i,j}^2 - 1 \end{pmatrix}$$

d) On vérifie que le produit matriciel $\Pi_{i,j}\,\Pi_{j,i} = I_2$.
On peut aussi retrouver ce résultat en utilisant le fait que σ_i et σ_j sont des symétries : $\pi_{i,j} \circ \pi_{j,i} = \sigma_i \circ \sigma_j \circ \sigma_j \circ \pi_i = Id$ car $\sigma_j \circ \sigma_j = Id$ et $\sigma_i \circ \sigma_i = Id$.

II.B.2)

a) On peut appliquer aux restrictions de σ_i et σ_j au plan $E_{i,j}$ rapporté à la base (e_i, e_j) les résultats de la partie I avec $a = a_{i,j}$, τ étant ici $\pi_{i,j}$.
On en déduit que si $a_{i,j} \in \{0, 1\}$, $\pi_{i,j}$ est d'ordre infini.
Remarquons que que puisque $\pi_{j,i} = \pi_{i,j}^{-1}$ ces deux endomorphismes ont même ordre dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ car pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\pi_{i,j}^k = Id \iff \pi_{j,i}^k = Id$. *faut-il détailler ?*

b) Si $a_{i,j} \geq 2$, on est dans le cadre de I.C:
On déduit de I.C.6 que $\pi_{i,j}$ est d'ordre $a_{i,j}$. Il en est de même pour $\pi_{j,i}$ qui a même ordre que $\pi_{j,i}$.

II.C.

II.C.1)

La matrice M est de la forme : $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\beta_1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\beta_n}{2} \\ \frac{\beta_1}{2} & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & \ddots & \frac{\beta_{n-1}}{2} \\ \frac{\beta_n}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\beta_{n-1}}{2} & 1 \end{pmatrix}$

avec $\beta_i \in \{-1, -\sqrt{2}, -\sqrt{3}\}$

puisque $m_{i,j} = -\cos\left(\dfrac{\pi}{a_{i,j}}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } a_{i,j} = 2 \\ 1 & \text{si } a_{i,j} = 1 \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \text{si } a_{i,j} = 4 \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \text{si } a_{i,j} = 6 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } a_{i,j} = 3 \end{cases}$

Soit $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ des réels non nuls. $(\nu_1\, e_1, \cdots, \nu_n\, e_n)$ est alors une base $\mathcal{B}'$ de E. Cherchons des conditions nécéssaires et suffisantes sur $\nu_1, \ldots, \nu_n$ pour que les matrices dans cette base de toutes les symétries $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ soient à coefficients entiers. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on notera $e'_i = \nu_i e_i$.

Pour $2 \leq i \leq n-1$, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\sigma_i(e_k) = \begin{cases} -e_i & \text{si } k = i \\ e_{i-1} - \beta_{i-1} e_i & \text{si } k = i-1 \\ e_{i+1} - \beta_i e_i & \text{si } k = i+1 \\ e_k & \text{sinon} \end{cases}$

On a donc $\sigma_i(e'_k) = \begin{cases} -e'_i & \text{si } k = i \\ e'_{i-1} - \beta_{i-1} \dfrac{\nu_{i-1}}{\nu_i} e'_i & \text{si } k = i-1 \\ e'_{i+1} - \beta_i \dfrac{\nu_{i+1}}{\nu_i} e'_i & \text{si } k = i+1 \\ e'_k & \textit{sinon} \end{cases}$

De la la même façon, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\sigma_1(e'_k) = \begin{cases} -e'_1 & \text{si } k=1 \\ e'_n - \beta_n \dfrac{\nu_n}{\nu_1} e'_1 & \text{si } k=n \\ e'_2 - \beta_1 \dfrac{\nu_2}{\nu_1} e'_1 & \text{si } k=2 \\ e'_k & \textit{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \sigma_n(e_k) = \begin{cases} -e'_n & \text{si } k=n \\ e'_{n-1} - \beta_{n-1} \dfrac{\nu_{n-1}}{\nu_n} e'_n & \text{si } k=n-1 \\ e'_1 - \beta_1 \dfrac{\nu_1}{\nu_n} e'_n & \text{si } k=1 \end{cases}$$

Les matrices dans $\mathcal{B}'$ de $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ seront toutes à coefficients entiers si et seulement si

$$\begin{cases} (1)\ \forall i \in \{1, \dots, n-1\}\ \dfrac{\nu_{i+1}}{\nu_i} \beta_i \in \mathbb{Z} \\ (2)\ \forall i \in \{1, \dots, n-1\}\ \dfrac{\nu_i}{\nu_{i+1}} \beta_i \in \mathbb{Z} \\ (3)\ \dfrac{\nu_n}{\nu_1} \beta_n \in \mathbb{Z} \\ (4)\ \dfrac{\nu_1}{\nu_n} \beta_n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Choisissons $\nu_1 = 1$.
Soit $A = \{\, i \in \mathbb{N} \mid 1 \le i \le n \quad \beta_i = -\sqrt{2}\,\}$ et $B = \{\, i \in \mathbb{N} \mid 1 \le i \le n \quad \beta_i = -\sqrt{3}\,\}$. Par hypothèse, A est de cardinal p et B est de cardinal q et p et q sont pairs.
Soit $i_1 < i_2 < \dots < i_{p/2} < \dots < i_p$ les éléments de A et $j_1 < \dots < j_{q/2} < \dots < j_q$ les éléments de B.
Soit $i \in \{1, \dots, n\}$:
Si $i \in \{\, i_1, \cdots, i_{p/2}\,\}$, $\beta_i = -\sqrt{2}$, on choisit $\nu_{i+1} = \sqrt{2}\nu_i$: $\dfrac{\nu_{i+1}}{\nu_i} \beta_i = -2$ et $\dfrac{\nu_i}{\nu_{i+1}} \beta_i = -1$
Si $i \in \{\, i_{p/2+1}, \cdots, i_p\,\}$, $\beta_i = -\sqrt{2}$, on choisit $\nu_{i+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \nu_i$: $\dfrac{\nu_{i+1}}{\nu_i} \beta_i = -1$ et $\dfrac{\nu_i}{\nu_{i+1}} \beta_i = -2$
Si $i \in \{\, j_1, \cdots, j_{q/2}\,\}$, $\beta_i = -\sqrt{3}$, on choisit $\nu_{i+1} = \sqrt{3}\nu_i =$: $\dfrac{\nu_{i+1}}{\nu_i} \beta_i = -3$ et $\dfrac{\nu_i}{\nu_{i+1}} \beta_i = -1$
Si $i \in \{\, j_{q/2+1}, \dots, j_q\,\}$, $\beta_i = -\sqrt{3}$, on choisit $\nu_{i+1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \nu_i$: $\dfrac{\nu_{i+1}}{\nu_i} \beta_i = -1$ et $\dfrac{\nu_i}{\nu_{i+1}} \beta_i = -3$
Si $i \in \{1, \dots, n\} \setminus (A \cup B)$, $\beta_i = -1$, on choisit $\nu_{i+1} = \nu_i$: $\dfrac{\nu_{i+1}}{\nu_i} \beta_i = \dfrac{\nu_i}{\nu_{i+1}} \beta_i = -1$
On définit ainsi $\nu_2, \dots, \nu_n, \nu_{n+1}$ et les conditions (1) et (2) sont réalisées .

$$\frac{\nu_n}{\nu_1} \beta_n = \frac{\nu_n}{\nu_{n+1}} \beta_n \,\nu_{n+1} = \left(\frac{\nu_n}{\nu_{n+1}} \beta_n\right) \prod_{i=1}^{n} \frac{\nu_{i+1}}{\nu_i}$$

Mais $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{\nu_{i+1}}{\nu_i} = \prod_{i \in \{\, i_1, \cdots, i_{p/2}\,\}} \frac{\nu_{i+1}}{\nu_i} . \prod_{i \in \{\, i_{p/2+1}, \cdots, i_p\,\}} \frac{\nu_{i+1}}{\nu_i} . \prod_{i \in \{\, j_1, \cdots, j_{q/2}\,\}} \frac{\nu_{i+1}}{\nu_i} . \prod_{i \in \{\, j_{q/2+1}, \dots, j_q\,\}} \frac{\nu_{i+1}}{\nu_i} . \prod_{i \in C} \frac{\nu_{i+1}}{\nu_i}$
en notant $C = \{1, \dots, n\} \setminus (A \cup B)$.

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\nu_{i+1}}{\nu_i} = (\sqrt{2})^{p/2} . \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{p/2} . (\sqrt{3})^{q/2} . \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{q/2} = 1$$

Finalement $\dfrac{\nu_n}{\nu_1} \beta_n = \dfrac{\nu_n}{\nu_{n+1}} \beta_n \in \mathbb{Z}$ par construction de ν_{n+1}.
De la même façon,

$$\frac{\nu_1}{\nu_n} \beta_n = \left(\frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} \beta_n\right) \frac{1}{\nu_{n+1}} = \left(\frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} \beta_n\right) \prod_{i=1}^{n} \frac{\nu_i}{\nu_{i+1}} = \left(\frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} \beta_n\right) \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\nu_{i+1}}{\nu_i}\right)^{-1} = \frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} \beta_n.$$

Par construction de ν_{n+1}, $\dfrac{\nu_{n+1}}{\nu_n} \beta_n \in \mathbb{Z}$.
Les conditions (1), (2), (3), (4) sont réalisées : les matrices dans $\mathcal{B}'$ de $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont à coefficients entiers relatifs.

II.C.2)
a) D'après l'étude du polynôme caractéristique de T, $(\det(T - \lambda I)$ ou $\det(\lambda I - T)$ selon la convention choisie), on sait que $\det(\lambda I - T)$ est une fonction polynôme en λ de degré n et de coefficient dominant égal à 1.

Ce polynôme est scindé dans $\mathbb{C}$ de racines les valeurs propres complexes de T. D'après les relations entre coefficients et racines d'un polynôme, $-\alpha_{n-1}$ est égal à la somme des valeurs propres elle même égale à $\mathrm{Tr}(T)$.

Dans une interprétation plus large du programme, on peut aussi convenir qu'il s'agit d'un résultat de cours....

b) D'après II.A.4.c, $\det(\lambda I - T) = \det((\lambda+1)I + \lambda C + {}^tC) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & \lambda\,\beta_1 & \lambda\,\beta_3 \\ \beta_1 & \lambda+1 & \lambda\,\beta_2 \\ \beta_3 & \beta_2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$

Après développement par rapport à la première colonne, calcul des déterminants d'ordre 2 et regroupement des termes, ou à l'aide d'une calculatrice, on obtient :

$$\det(\lambda I - T) = \lambda^3 + \lambda^2\big(3 - (\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2) + \beta_1\beta_2\beta_3\big) + \lambda\big(3 - (\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2) + \beta_1\beta_2\beta_3\big) + 1$$

c) En utilisant II.A.4, $\det(\lambda I - T) = \det((\lambda+1)I + \lambda C + {}^tC) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & \lambda\,\beta_1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda\,\beta_n \\ \beta_1 & \lambda+1 & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \beta_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda\,\beta_{n-1} \\ \beta_n & 0 & \cdots & 0 & \beta_{n-1} & \lambda+1 \end{vmatrix}$

Notons $\Delta_n(\lambda)$ un tel déterminant d'ordre n où $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sont des réels.

On sait que $\Delta_n(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k \lambda^k$.

Montrons par récurrence sur n que $\alpha_{n-1} = n - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 + (-1)^{n+1}\beta_1 \ldots \beta_n$ pour $n \geq 3$.

- Le résultat est vrai pour $n = 3$.
- supposons le vrai pour un certain $n \geq 3$

$$\Delta_{n+1}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & \lambda\,\beta_1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda\,\beta_{n+1} \\ \beta_1 & \lambda+1 & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \beta_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda\,\beta_n \\ \beta_{n+1} & 0 & \cdots & 0 & \beta_n & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première colonne, on obtient
$\det(\lambda I - T) = (\lambda+1)A(\lambda) - \beta_1 B(\lambda)) + (-1)^{n+2}\beta_{n+1}C(\lambda)$
avec

$$A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & \lambda\,\beta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda\,\beta_n \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_n & \lambda+1 \end{vmatrix} \qquad B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda\beta_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda\beta_{n+1} \\ \beta_2 & \lambda+1 & \lambda\beta_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda\beta_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \beta_n & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

et

$$C(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda\beta_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda\beta_{n+1} \\ \lambda+1 & \lambda\beta_2 & \ddots & & & 0 \\ \beta_2 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{n-1} & \lambda+1 & \lambda\beta_n \end{vmatrix}$$

$A(\lambda)$ est le déterminant $\Delta_n(\lambda)$ associé à $(\beta_2, \ldots, \beta_n, 0)$.

Pour tout entier q, on notera $\mathbb{R}_q[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur à q.

Par hypothèse de récurrence, $A(\lambda) = \lambda^n + (n - \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \beta_i^2)\lambda^{n-1} + F(\lambda)$ où $F \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$.

$(\lambda+1)A(\lambda) = \lambda^{n+1} + (n+1 - \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \beta_i^2)\lambda^n + R_A(\lambda)$ où $R_A \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

En développant $B(\lambda)$ par rapport à la première ligne,
$B(\lambda) = \beta_1\, \lambda(\lambda+1)^{n-1} + (-1)^{n+1}\lambda\beta_2 \ldots \beta_n\beta_{n+1}$
puis, $-\beta_1 B(\lambda) = -\beta_1^2\lambda^n + R_B(\lambda)$ où $R_B \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

En développant $C(\lambda)$ par rapport à la première ligne,

$$C(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda\beta_i) + (-1)^{n+1}(\lambda\beta_{n+1}) \begin{vmatrix} \lambda+1 & \lambda\beta_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \beta_2 & \lambda+1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda\beta_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & \beta_{n-1} & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

Ce dernier déterminant est du type $\Delta_{n-1}(\lambda)$ associé à $(\beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, 0)$. Il s'agit donc d'un polynôme de degré $n-1$ de coefficient dominant égal à 1.

$(-1)^{n+2}\beta_{n+1}C(\lambda) = (-1)^n\lambda^n \displaystyle\prod_{i=1}^{n+1} \beta_i - \lambda^n\beta_{n+1}^2 + R_C(\lambda)$ où $R_C \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Finalement,

$\det(\lambda I - T) = \lambda^{n+1} + \lambda^n(n+1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \beta_i^2 + (-1)^n\beta_1 \ldots \beta_{n+1}) + R(\lambda)$ avec $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$

La récurrence est établie.

II.C.3)

a) S'il existe une base dans laquelle toutes les matrices des σ_k sont à coefficients entiers, alors dans une telle base la matrice de τ est à coefficients entiers et donc $\mathrm{Tr}(\tau) \in \mathbb{Z}$.

b) En utilisant II.C.2, $\mathrm{Tr}(\tau) = -\alpha_{n-1} = n - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 + (-1)^{n+1}\beta_1 \ldots \beta_n$

On sait qu'il existe p indices i tels que $\beta_i = -\sqrt{2}$, q indices i tels que $\beta_i = -\sqrt{3}$ et pour les $n-p-q$ autres indices, $\beta_i = -1$.

$m = n - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 \in \mathbb{Z}$ et $\mathrm{Tr}(\tau) = m - (\sqrt{2})^p(\sqrt{3})^q$

$\mathrm{Tr}(\tau) = \begin{cases} m + r\sqrt{2} & \text{si } p \text{ est impair et } q \text{ pair} \\ m + r\sqrt{3} & \text{si } q \text{ est impair et } p \text{ pair} \\ m + r\sqrt{6} & \text{si } p \text{ et } q \text{ sont impairs} \end{cases}$ avec m et r entiers. Comme $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels (*faut-il le démontrer?*), $\mathrm{Tr}(\tau)$ est irrationnel.

c) A fortiori si $\mathrm{Tr}(\tau) \in \mathbb{Z}$, alors p et q sont pairs. La réciproque a été démontrée en II.C.1 ce qui établit l'équivalence.

Partie III - Un exemple dans le cas $n = 3$

Puisque $a_{3,1} = 2$ la partie II NE s'applique PAS [... ! ...]

III.A Sauf erreur $m_{1,3} = 0, m_{1,2} = -1/2, m_{2,3} = -\sqrt{2}/2$ d'où les matrices dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(\sigma_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(\sigma_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

En utilisant $e'_3 = \sqrt{2}e_3$, on obtient :

$$\mathrm{mat}_{(e_1,e_2,e'_3)}(\sigma_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{mat}_{(e_1,e_2,e'_3)}(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{mat}_{(e_1,e_2,e'_3)}(\sigma_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{Dans cette base } (e_1, e_2, \sqrt{2}e_3) \text{ tous les coefficients des matrices de } \sigma_1, \sigma_2 \text{ et } \sigma_3 \text{ sont des entiers.}}$

III.B.1) L'énoncé admet que Φ est une forme bilinéaire.

De plus elle est symétrique car $M = (m_{i,j}) = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique.

Pour démontrer que Φ est bien définie-positive, on peut à nouveau :

• décomposer en somme de carrés : cela donne ici :

$\Phi(\sum_{1\leqslant i\leqslant 3} x_i e_i, \sum_{1\leqslant i\leqslant 3} x_i e_i) = (x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{4}(x_2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}x_3)^2 + \frac{1}{3}x_3^2$

• calculer les valeurs propres de M, on trouve 1, $1 - \sqrt{3}/2$ et $1 + \sqrt{3}/2$ et contrôler qu'elles sont toutes strictement positives.

III.B.2) L'orthogonal du vecteur $u = ae_1 + be_2 + ce_3$ étant l'ensemble des vecteurs $v = \sum_{1\leqslant i\leqslant 3} x_i e_i$ vérifiant $\Phi(u, v) = 0$, on obtient l'équation :

$$(a - \frac{1}{2}b)x_1 + (-\frac{1}{2}a + b - \frac{\sqrt{2}}{2}c)x_2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2}b + c)x_3 = 0$$

III.C) On reprend les matrices écrites au III.A... On trouve :
F_1 est le plan $-2x_1 + x_2$ et $G_1 = \mathbb{R}e_1 = F_1^{\perp}$;
F_2 est le plan $x_1 - 2x_2 + \sqrt{2}x_3$ et $G_2 = \mathbb{R}e_2 = F_2^{\perp}$;
F_3 est le plan $\sqrt{2}x_2 - x_1$ et $G_3 = \mathbb{R}e_3 = F_3^{\perp}$.

III. D) La composée de deux réflexions est une rotation (axiale si les deux réflexions sont distinctes).
On a bien sûr $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = Id$.
Précisons les SIX autres rotations (!! Peut-être que quelque de chose de simple m'échappe ?) :

Notons $r = \sigma_1 \circ \sigma_2$. Sa matrice dans $\mathcal{B}$ est : $R = S_1 \times S_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

L'axe est dirigé par le vecteur unitaire $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}e_1 + 2\sqrt{2}e_2 + 3e_3)$.
Notons que la trace de R est 0 donc $\cos(\theta) = -1/2$: $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$.
Pour déterminer l'angle orienté, on ne peut pas utiliser la formule habituelle qui utilise le produit vectoriel usuel...
Première méthode :
L'orthogonal de u_1 est le plan $x_3 = 0$.
Donc e_1 est orthogonal à u_1 et donc le cours donne :

$r(e_1)=\cos(\theta)e_1+\sin(\theta)e'_1$ où e'_1 est orthogonal à u_1 ($x_3=0$) et à e_1 ($2x_1-x_2=0$) de même norme que e_1 et la base (e_1,e'_2,u_1) est directe.

On a : $\cos(\theta)=-1/2, e'_1=\alpha(1,2,0), \det(e_1,e'_1,u_1)=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix}1 & \alpha & \sqrt{2}\\ 0 & 2\alpha & 2\sqrt{2}\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}6\alpha>0$

Et on a aussi $r(e_1)=e_2$ d'où $1=0+\sin(\theta)2\alpha$ donc $\sin(\theta)>0$.

Deuxième méthode : pour les candidats qui savent[1] que le signe du sinus est le signe du déterminant dans une base directe de $(x,r(x),u_1)$ où x n'est pas colinéaire à u_1 :

On calcule par exemple $\det_{(e_1,e_2,e_3)}(e_1,r(e_1),\sqrt{3}u_1)=\begin{vmatrix}1 & 0 & \sqrt{2}\\ 0 & 1 & \sqrt{2}\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1>0$, donc $\sin(\theta)>0$ car la base (e_1,e_2,e_3) est directe.

$\boxed{\sigma_1\circ\sigma_2 \text{ est la rotation d'axe orienté par } \sqrt{2}e_1+2\sqrt{2}e_2+3e_3 \text{ et d'angle } +2\pi/3.}$

$\sigma_2\circ\sigma_1=(\sigma_1\circ\sigma_2)^{-1}$ donc c'est la rotation de même axe et d'angle opposé.

Pour $\sigma_2\circ\sigma_3$ on trouve $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -\sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2} & -1\end{pmatrix}$, axe dirigé par $u_2=(1,1,\sqrt{2}/2)$ et une trace de 1 donc $\theta=\pm\pi/2$. En calculant $\det_{(e_1,e_2,e_3)}(e_1,r(e_1),u_2)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{vmatrix}=\sqrt{2}>0$, donc $\sin(\theta)>0$

$\boxed{\sigma_2\circ\sigma_3 \text{ est la rotation d'axe orienté par } e_1+e_2+\sqrt{2}e_3 \text{ et d'angle } +\pi/2.}$

Remarque : On peut vérifier que $\mathbb{R}u_2^\perp$ est le plan d'équation $x_1=0$.

Pour $\sigma_1\circ\sigma_3$ on trouve $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & -1\end{pmatrix}$, axe dirigé par $(1,2,\sqrt{2})$ et une trace de -1 donc $\theta=\pm\pi$ (le signe est sans importance...). On a donc :

$\boxed{\sigma_1\circ\sigma_3=\sigma_3\circ\sigma_1 \text{ est la rotation axe dirigé par } (1,2,\sqrt{2}) \text{ et d'angle } \pi}$ (c'est un “demi-tour”).

Remarque : on avait ici clairement $r(e_1)=-e_1, r(e_3)=-e_3$... le plan orthogonal à ce troisième axe est le plan d'équation $x_2=0$...

III.E.1) On peut dire que $\tau=\sigma_1\circ\sigma_2\circ\sigma_3$ est un automorphisme orthogonal (composé) qui n'est pas une rotation (déterminant=-1).

Remarque : On peut même prouver par l'absurde que ce n'est pas une réflexion. En effet si τ est une réflexion (qui ne peut pas être σ_3) de plan $\mathcal{P}$. Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{P}\cap\mathbb{R}e_3^\perp$ serait invariant par τ et par σ_3 et donc par la rotation $\sigma_1\circ\sigma_2=\tau\circ\sigma_3$. Ce vecteur serait colinéaire à u_1 de III.D. Or u_1 n'est pas orthogonal à e_3. Absurde.

III.E.2) $T=\begin{pmatrix}0 & 1 & -\sqrt{2}\\ 1 & 1 & -\sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2} & -1\end{pmatrix}$. On trouve après calculs que le vecteur $\boxed{u=\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2},0,1)}$ est de norme 1 et vérifie $\tau(u)=-u$.

L'orthogonal de u a pour équation : $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+z=0$.

Je choisis $\boxed{v=(1,1,0)}$ qui est orthogonal à u et de norme... 1.

L'orthogonal de u a pour équation : $x+y-\sqrt{2}z=0$.

On cherche un vecteur w vérifiant les deux équations, on trouve $w=\alpha(1,3,2\sqrt{2})$. De norme 1 donc $\alpha=\pm1/\sqrt{3}$. On teste ensuite le déterminant pour savoir quand la base sera directe.

[1] Ce qui ne me paraît pas exigible...

On trouve finalement $\boxed{w = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 3, 2\sqrt{2})}$.

III.E.3) Notons s la réflexion de plan $u^{\perp}$ et $r = \tau \circ s$.
Méthode 1 :
r est la composée de 4 (nombre pair) de réflexions donc c'est une rotation. τ n'étant pas une réflexion, $r \neq Id$, donc c'est une rotation axiale.
$r(u) = \tau(s(u)) = \tau(-u) = +u$. u est invariant par r donc il dirige l'axe de la rotation r.
Notons θ l'angle orienté par u. (u, v, w) étant une base orthonormale directe, on a $r(v) = \cos(\theta)v + \sin(\theta)w$.

Par ailleurs, $r(v) = \tau(s(v)) = \tau(v) = T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

En identifiant dans la base $\mathcal{B}$, on trouve $\cos\theta = 1/2, \sin\theta = +\sqrt{3}/2$, $\boxed{\theta = \pi/3}$
Méthode 2 :
À l'aide d'une calculatrice, on explicite la matrice de τ dans la base (u, v, w) en utilisant la formule de changement de base. On trouve $\mathrm{mat}_{(u,v,w)}(\tau) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & +\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ et donc facilement que $\mathrm{mat}_{(u,v,w)}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & +\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Là on reconnaît sans peine une rotation d'axe dirigé et orienté par u et d'angle $+\pi/3$ (car (u, v, w) est une base orthonormale...).

$$\boxed{\tau = r \circ s \text{ où } r \text{ est la rotation d'axe } \mathbb{R}u \text{ et d'angle } \pi/3 \text{ et } s \text{ la réflexion de plan } (\mathbb{R}u)^{\perp}.}$$

On a $r \circ s = s \circ r$ car les endomorphismes induits sur la droite $\mathbb{R}u$ et sur le plan orthogonal commutent (ou bien on peut tester les trois vecteurs de la base (u, v, w)...) donc $\tau^k = r^k \circ s^k$.
Pour avoir $\tau^k = Id$ il faut que k soit pair (cf le déterminant) puis que $r^k = Id$ donc que k soit un multiple entier de 6.
La réciproque est vraie...
$\boxed{\text{L'ordre de } \tau \text{ est 6.}}$

FIN