MATHÉMATIQUES I

On dit qu'une suite réelle $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **ultimement périodique** lorsqu'elle est périodique à partir d'un certain rang, c'est-à-dire s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$(\mathscr{R})\quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\quad n \geq n_0 \Rightarrow a_{n+p} = a_n\ .$$

(L'entier p est une période de la suite $(a_n)_{n \geq n_0}$).

On note UP l'ensemble des suites ultimement périodiques de réels.

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés élémentaires de ces suites et le caractère ultimement périodique éventuel de suites simples.

Partie I -

I.A - Montrer que UP est un sous espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles. Est-il de dimension finie ?

I.B - Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de UP et $\mathscr{P}(a)$ l'ensemble des entiers $p \geq 1$ tels que la suite a admette p pour période à partir d'un certain rang.

I.B.1) Montrer qu'il existe un entier $T \geq 1$ (que l'on appellera la période de a) tel que :

$$\mathscr{P}(a) = \mathbb{N}^*T = \{kT, k \in \mathbb{N}^*\}\ .$$

Que peut-on dire de la suite lorsque $T = 1$?

I.B.2) Montrer qu'il existe un plus petit entier n_0 tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\quad n \geq n_0 \Rightarrow a_{n+T} = a_n$$

Montrer que, pour tout $p \in \mathscr{P}(a)$, n_0 est le plus petit entier à partir duquel la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ devient p-périodique. Combien de paramètres réels suffisent à définir parfaitement a ?

I.C - Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de UP.

I.C.1) Montrer que a est bornée et que le rayon de convergence R_a de la série entière $\sum a_n x^n$ est strictement positif. À quelle condition nécessaire et suffisante R_a est-il égal à $+\infty$? Que vaut-il sinon ?

I.C.2) Montrer que la somme de cette série est une fraction rationnelle. Dans quel cas est-ce un polynôme ?

Filière PC

I.D - Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, dont la somme est la restriction à $]-R, R[$ d'une fraction rationnelle.
La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle ultimement périodique ?

Partie II -

II.A - Exemple 1

On définit la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$F_0 = 0 \text{ , } F_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \text{ , } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

et la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $a_n = 0$ si F_n est pair et $a_n = 1$ sinon. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle ultimement périodique ?
Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum a_n x^n$.

II.B - Exemple 2

On définit maintenant la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \text{ , } a_{2n} = a_n \text{ et } a_{2n+1} = -a_n \text{ .}$$

II.B.1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
On note S sa somme.

II.B.2) Trouver une relation liant $S(x)$ et $S(x^2)$.
En déduire que, pour tout x, $x \in]-1, 1[$,

$$S(x) = \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=0}^{n} (1 - x^{(2^k)}) \text{ .}$$

II.B.3) Étudier, pour n donné dans $\mathbb{N}$,

$$\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{S(x)}{(1-x)^n} \right)$$

et en déduire que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas ultimement périodique.

II.C - Exemple 3

Soit $x = a/b$ un rationnel strictement positif, donné sous forme irréductible. On définit deux suites d'entiers $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

- $d_0 = E(x)$ (partie entière) et r_0 est le reste de la division euclidienne de a par b.
- pour tout $n \geq 1$, r_n (resp. d_n) est le reste (resp. le quotient) de la division euclidienne de $10 \cdot r_{n-1}$ par b.

II.C.1) Dans cette question (uniquement), $x = 22/7$.
Déterminer $d_0, d_1, \ldots, d_{10}$.

II.C.2) Montrer que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ultimement périodique. Qu'en est-il de $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

II.C.3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq d_n \leq 9$.

II.C.4) Établir l'égalité :

$$x = E(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n 10^{-n}$$

Partie III -

Le but de cette partie est de montrer que le réel π n'est pas un élément de $\mathbb{Q}$.

$E = C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions de classe C^{∞} de $\mathbb{R}$ dans lui-même.

Pour tout élément f de E, on note F l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_0^x t f(t) dt .$$

III.A - L'application de E qui à tout élément f associe F est notée L. Vérifier que L est une application linéaire de E dans E.

III.B - On considère dans cette question un élément f de E supposé borné sur $\mathbb{R}$ et on note $M = \|f\|_{\infty, \mathbb{R}} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

III.B.1) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$|F(x)| \leq M \frac{x^2}{2}$$

III.B.2) On définit une suite d'éléments de E par $f_0 = f$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $f_{n+1} = L(f_n)$.
Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\mathbb{R}$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{x^{2n}}{2.4\ldots2n} M .$$

III.B.3) Soit I un segment quelconque de $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout n, f_n est bornée sur I et $\lim_{n \to +\infty} (\sup_{x \in I} |f_n(x)|) = 0$.

III.C - On prend maintenant dans cette question et dans les suivantes $f = \sin$, et on considère la suite de fonctions définie comme dans la question précédente.

III.C.1) Déterminer les fonctions f_1 et f_2.

III.C.2) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\mathbb{R}$,

$$f_{n+1}(x) = (2n+1)f_n(x) - x^2 f_{n-1}(x) \quad .$$

III.D - Pour $p \in \mathbb{N}$, on note F_p le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynômes de degré au plus p.

III.D.1) On définit :

$$\begin{aligned} H \,:\, F_p \times F_p &\to F_p \times F_p \\ (P,Q) &\mapsto (P' - Q, P + Q') \end{aligned}$$

Vérifier que H est un automorphisme de $F_p \times F_p$.

III.D.2) On désigne par S l'ensemble des fonctions paires de F_p, par A celui des fonctions impaires.

Montrer que $H(S \times A) = A \times S$.

III.D.3) On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie dans la question III.C. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un couple unique de fonctions P_n et Q_n de F_n, P_n paire et Q_n impaire, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = P_n(x)\sin x + Q_n(x)\cos x \quad .$$

Déterminer P_n et Q_n pour $n = 0, 1, 2$.

III.D.4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P_{n+1}(x) = (2n+1)P_n(x) - x^2 P_{n-1}(x) \quad .$$

En déduire que les fonctions P_n sont des polynômes à coefficients entiers.

III.E - On suppose ici que le réel π est élément de ɜmb, ensemble des nombres rationnels.

Soit donc p élément de $\mathbb{Z}$ et q élément de $\mathbb{N}^*$ tels que $\pi = p/q$.

III.E.1) Montrer que la suite

$$\left((2q)^n P_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

est une suite d'entiers. Quelle est sa limite ?

III.E.2) En déduire que π n'est pas rationnel.

Partie IV -

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par, pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_n = 1$ si $\sin n > 0$, $a_n = 0$ sinon.

Le but de cette partie est d'étudier si cette suite à valeurs entières est élément de UP.

IV.A - On suppose que cette suite est ultimement périodique.

IV.A.1) Montrer qu'il existe un entier N et un entier strictement positif T tels que, pour tout entier k supérieur ou égal à N, le signe de $\sin(kT)$ soit constant.

IV.A.2) En déduire que la suite $(\cos(kT))_{k \in \mathbb{N}}$ est composée de réels strictement positifs à partir d'un certain rang.

IV.B - Soit $G = \mathbb{Z}T + 2\pi\mathbb{Z} = \{nT + 2k\pi, (n,k) \in \mathbb{Z}^2\}$.

IV.B.1) Montrer que G est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Existe-t-il $a \in \mathbb{R}$ tel que $G = a\mathbb{Z}$?

IV.B.2) On pose $G^+ = G \cap \mathbb{R}^{+*}$ (ensemble des éléments strictement positifs de G). Montrer que G^+ possède une borne inférieure a.

IV.B.3) On suppose $a \in G^+$. Montrer que $G = a\mathbb{Z}$.

IV.B.4) a n'est donc pas élément de G^+. Supposant $a > 0$, montrer que l'on peut trouver deux éléments g et g' de G^+ tels que $a < g' < g < 2a$. En déduire $a = 0$.

IV.C -

IV.C.1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $g_n \in G$ tel que $0 < g_n < 10^{-n}$.

IV.C.2) Soit x un réel.

Construire une suite d'éléments de G convergeant vers x.

IV.D -

IV.D.1) Montrer l'existence d'une suite d'entiers positifs $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $(\cos(k_n T))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $-(1/2)$.

Montrer que l'ensemble $\{\cos(k_n T), n \in \mathbb{N}\}$ des termes de cette suite n'est pas de cardinal fini.

IV.D.2) Construire alors une suite strictement croissante $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ extraite de $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la limite de $(\cos(y_n T))_{n \in \mathbb{N}}$ soit $-(1/2)$.

IV.D.3) La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle ultimement périodique ?‘

••• FIN •••
