Partie I

I.1 Vérification simple et classique. D'ailleurs, si on désigne par γ_k l'application $\vartheta \longmapsto \cos k\vartheta$ et par σ_k l'application $\vartheta \longmapsto \sin k\vartheta$, alors les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(\gamma_0)$, $\mathrm{Vect}(\gamma_1, \sigma_1)$ et $\mathrm{Vect}(\gamma_2, \sigma_2)$ sont en somme directe dans $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ (penser à l'endomorphisme de dérivation seconde), ensuite de quoi on prouve facilement que les familles (γ_1, σ_1) et (γ_2, σ_2) sont en outre libres. Cela achève la démonstration.

I.2 Si le cercle Γ paramétré par $\vartheta \longmapsto (x_0 + \rho\cos\vartheta, \, y_0 + \rho\sin\vartheta)$ est inclus dans $\mathscr{C}_{A,B,C,D,E,F}$, on a, pour tout $\vartheta \in \mathbb{R}$,

$$A(x_0+\rho\cos\vartheta)^2+B(x_0+\rho\cos\vartheta)(y_0+\rho\sin\vartheta)+C(y_0+\rho\sin\vartheta)^2+D(x_0+\rho\cos\vartheta)+E(y_0+\rho\sin\vartheta)+F=0$$

Il suffit alors de développer puis linéariser cette expression pour obtenir, pour $\vartheta \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\rho^2}{2}\Big((A-C)\cos 2\vartheta + B\sin 2\vartheta\Big) + \cdots = 0$$

relation linéaire entre les fonctions γ_0, γ_1, σ_1, γ_2, σ_2. De **I.1** suit que $A = C$ et $B = 0$.

Inversement, une conique d'équation $A(x^2+y^2) + Dx + Ey + F = 0$, donc avec $A \neq 0$, représente un cercle de rayon $\geqslant 0$ si, et seulement si, $D^2 + E^2 \geqslant 4AF$ (mettre l'expression sous forme canonique).

Partie II

II.A.1 $M_0 \in \mathscr{C} \iff A(x_0^2+y_0^2) + Bx_0y_0 + Dx_0 = 0$. Au vu de **I.2**, une conique est dans $\mathscr{E}_1$ **et** est un cercle si, et seulement si, $B = 0$ et $D = -\dfrac{A(x_0^2+y_0^2)}{x_0}$. Le résultat en découle alors, en particulier l'*unicité* de $\mathscr{C}_1$ puisque les équations obtenues sont deux à deux proportionnelles.

$\mathscr{C}_1$ est un *vrai* cercle tangent (en O) à Oy, par exemple parce que son centre Ω a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_0^2+y_0^2}{2x_0}, \, 0\right)$ et que son rayon $R = \left|\dfrac{x_0^2+y_0^2}{2x_0}\right| = \|\overrightarrow{O\Omega}\|$. On en conclut de Ω est le point d'intersection de Oy avec la médiatrice de $[OM_0]$ qui lui est sécante.

II.A.2 On vérifie facilement que $\mathscr{C}_2$ est de la forme souhaitée si, et seulement si, $A = C = 0$ et $C = -By_0$. Là encore, le résultat en découle, en particulier l'*unicité* de $\mathscr{C}_2$ puisque les équations obtenues sont proportionnelles à $X(Y - y_0) = 0$. $\mathscr{C}_2$ est la réunion de Oy avec la parallèle à Ox passant par M_0.

II.A.3 $M \in \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ si, et seulement si, ses coordonnées sont $(0, 0)$, (x_0, y_0) ou $(y_0^2/x_0, \, y_0)$. Cela fait trois points distincts si $y_0 \notin \{0, \pm x_0\}$, et deux sinon.
Inversement, il est clair que M appartient à toutes les coniques de $\mathscr{E}_1$ si, et seulement si, $M \in \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$. Parmi ces points se trouvent toujours O et M_0.

II.B À noter que, si $(x_0 = \rho\cos\vartheta, \, y_0 = \rho\sin\vartheta)$, alors

$$(y_0^2/x_0 = \rho \,\mathrm{tg}\,\vartheta\cos(\pi/2 - \vartheta), \, y_0 = \rho\,\mathrm{tg}\,\vartheta\sin(\pi/2-\vartheta))$$

Cela fait le lien avec **II.A** et explique le caractère involutif de φ, vu **II.A.3**.

II.B.1 La cohérence est claire ; $\varphi(M_0)$ est sur toutes les coniques de $\mathscr{E}_1$ vu la remarque *supra*. On peut donc construire $\varphi(M_0)$ comme il suit : on construit Ω comme en **II.A.1**, puis $\mathscr{C}_1$ connaissant son centre et un de ses points (O par exemple) et $\varphi(M_0)$ est la seconde intersection, éventuellement confondue avec M_0, de ce cercle avec la parallèle à Ox menée de M_0.

II.B.2 Si $M \in P'$, $\varphi(M) \in P' \iff y_M \neq 0$. Dans ce cas, $\varphi \circ \varphi(M) = M$; en d'autres termes, φ est une involution quadratique : si M a des coordonnées projectives $(x,\, y,\, t)$, alors $\varphi(M)$ a pour coordonnées projectives $(y^2,\, xy,\, tx)$.

II.B.3 γ est le cercle centré en $(0,\, a)$ et de rayon a. Une équation polaire de γ' est alors $\rho = 2a\dfrac{\cos^2\vartheta}{\sin\vartheta}$, de sorte que γ' est une cissoïde droite, voir figure.

II.C.1a On a immédiatement $\nu = -\dfrac{\lambda(x_0^2+y_0^2)+2\mu x_0 y_0}{x_0}$.

II.C.1b Comme $B^2 - 4AC = 4(\mu^2-\lambda^2) \neq 0$, la conique a un centre, qui est le point critique de $\lambda(x^2+y^2)+2\mu xy+\nu X$, à savoir $\left(-\dfrac{\lambda\nu}{2(\lambda^2-\mu^2)},\, \dfrac{\mu\nu}{2(\lambda^2-\mu^2)}\right)$.

II.C.2 L'appartenance à Γ est immédiate. Γ est une hyperbole équilatère de centre $O'\left(\dfrac{x_0^2+y_0^2}{4x_0},\, \dfrac{y_0}{2}\right)$, qui passe par O. Les axes sont les parallèles à Ox et Oy menées de O' et les sommets les points $M_3(x_0/2,\, y_0/2)$ et $M_3'(y_0^2/2x_0,\, y_0/2)$, milieux respectifs de $[OM_0]$ et de $[OM_0']$. [*Si on plonge le plan de référence dans un plan projectif complexe et que l'on choisisse deux points A et B sur la droite de l'infini, le centre de* $(\mathscr{C}_{\lambda,\,\mu})$ *est l'intersection des polaires de A et de B, qui décrivent respectivement deux faisceaux de droites en étant liées homographiquement. Ce centre décrit donc une conique, ce que confirme le calcul* supra.]

II.C.3
$\Gamma \cap Ox = \{O,\, M_1\}$, où M_1 est le centre du cercle $\mathscr{C}_1$.
$\Gamma \cap Oy = \{O,\, M_2\}$, où M_2 est le centre de $\mathscr{C}_2$.
$\Gamma \cap OM_0 = \{O,\, M_3\}$; $\Gamma \cap OM_0' = \{O,\, M_3'\}$.
$\Gamma \cap M_0M_0' = \{O'',\, M_2\}$, où O'' est le milieu de $[M_0M_0']$.

La figure formée par ces six points est symétrique par rapport à O'.

II.C.5 $\mathscr{C}_{1,\,1}$ et $\mathscr{C}_{1,\,-1}$ sont des paraboles d'axes orthogonaux, parallèles aux bissectrices du repère. Voir la figure. [*Quand deux paraboles d'axes orthogonaux se coupent en quatre points, ces quatre points sont cocycliques ; ici, ils sont sur le cercle* $\mathscr{C}_1$. *Les points à l'infini de* (Γ) *complétée projectivement sont les centres de ces deux paraboles, et cela explique que* (Γ) *soit une hyperbole équilatère. Une autre faon de voir cela est de considérer les points cycliques I et J qui sont homologues dans l'involution de* DÉSARGUES *que le faisceau des* $(\mathscr{C}_{\lambda,\,\mu})$ *induit sur la droite de l'infini.*]

Partie III

III.A.1 Si $C = a + \mathrm{i}b$, un élément $\mathscr{C}$ de $\mathscr{E}_2$ a une équation cartésienne de la forme

$$A(x^2+y^2)+2B(x^2-y^2)+2(ax+by)+D=0$$

Si $A = B = 0$, alors a, b et D ne sont pas tous nuls et $\mathscr{C}$ est inclus dans une droite, mais cela contredit l'hypothèse que M_1, M_2 et M_3 ne sont pas alignés. La forme des équations montre que les axes de ces coniques sont parallèles aux axes de coordonnées.

III.A.2a Il est classique que l'inversibilité de $\widetilde{\mathscr{M}}$ équivaut au non-alignement des points M_1, M_2 et M_3. Cette matrice étant extraite de $\mathscr{M}$, on en conclut que le rang de cette dernière est $\geqslant 3$.
III.A.2b Comme produit cartésien, E est de dimension 5 ; S en est clairement un sous-espace vectoriel. En outre, S est l'espace vectoriel des solutions d'un système linéaire de trois équations indépendantes à cinq inconnues, et donc $\dim S = 2$.
III.A.2c Si $\mathrm{rg}\mathscr{M} = 3$, alors, vu **III.A.2a**, la dernière ligne de $\mathscr{M}$ est combinaison linéaire des trois autres, et le résultat s'ensuit. Si, inversement, M_4 appartient à toutes les coniques de $\mathscr{E}_2$, l'ensemble des $(A,\, B,\, C,\, D) \in S$ vérifiant de plus

$$A\overline{z_4}z_4 + B(z_4^2+\overline{z_4}^2) + \overline{C}z_4 + C\overline{z_4} + D = 0$$

est égal à S et la discussion générale des systèmes linéaires montre que le membre de gauche de cette équation est combinaison linéaire des $A\overline{z_i}z_i + B(z_i^2 + \overline{z_i}^2) + \overline{C}z_i + C\overline{z_i}$, pour $1 \leqslant i \leqslant 3$. Donc, $\mathrm{rg}\mathscr{M} \leqslant 3$ et on conclut alors.

III.B.1 Le seul cercle possible est le cercle circonscrit au triangle $M_1M_2M_3$; inversement, il a bien une équation de la forme souhaitée. Si M_4 est sur ce cercle, z_4 est de module a et le reste suit.

III.B.2 On a tout de suite $\mathscr{D} = (z_1z_2z_3z_4 - a^4)V(z_1,\, z_2,\, z_3,\, z_4)$.

III.B.3 Remarquer que la première colonne de $\mathscr{M}$ est maintenant ${}^t(a^2,\, a^2,\, a^2,\, a^2)$, que $z_i^2 + \overline{z_i}^2 = \dfrac{z_i^4 + a^4}{z_i^2}$ et que $\overline{z_i} = \dfrac{a^2}{z_i}$ pour tout i.

III.B.4a Compte tenu du résultat admis *supra* et de **III.B.3**, les points appartenant à toutes les coniques de $\mathscr{E}_2$ sont M_1, M_2, M_3 et le point M_4 d'affixe $\dfrac{a^4}{z_1z_2z_3}$. Cela donne en général quatre points distincts ; en revanche, on n'obtient que trois points si par exemple $\dfrac{a^4}{z_1z_2z_3} = z_1$.

III.B.4b La réunion des droites M_1M_2 et M_3M_4 est une conique de $\mathscr{E}_2$, donc les bissectrices de ce couple sont parallèles aux axes. On peut l'établir aussi en traduisant par des relations angulaires la formule $z_1z_2z_3z_4 = a^4$.

III.C.1 On se ramène à l'hypothèse **III.B** par translation de repère, la nouvelle origine étant le centre du cercle circonscrit au triangle $M_1M_2M_3$.

III.C.2 Par choix d'un repère orthonormé *ad hoc*, on se ramène au cas où $\Delta = Ox$. Alors, vu notamment **III.B.4b**, les droites considérées concourent en M_4 si on a posé $(M_1,\, M_2,\, M_3) = (A,\, B,\, C)$.

Partie IV

IV.A.1 Φ est la rotation $R(O,\, \vartheta)$; $\Phi(\Gamma)$ a une équation de la forme $\overline{A}Z^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\vartheta} + A\overline{Z}^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\vartheta} + \dots$ On choisit alors ϑ pour que $\overline{A}/A = \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\vartheta}$ et on divise l'équation obtenue par un scalaire idoine.

IV.A.2 On reconnaît là l'équation d'une hyperbole équilatère, éventuellement dégénérée.

IV.B Comme en **III.A**, on montre que M_4 convient si, et seulement si, le rang de $\mathscr{M}'$ est égal à 3.

IV.C.1 Le couple $(u,\, v) = (z_1 + z_2 + z_3,\, z_2z_3 + z_3z_1 + z_1z_2)$ convient.

IV.C.2 Puisque les z_i sont solutions de l'équation $\overline{z}z = a^2$, on peut prendre $\alpha = -u$, $\beta = v$, $\alpha' = -u$, et $\beta' = v/a^2$.

IV.C.3 $\mathscr{M}'$ a même rang que la matrice dont les lignes sont les $(H_1(z_i),\, \overline{z_i}^2,\, H_2(z_i),\, \overline{z_i},\, 1)$, avec $1 \leqslant i \leqslant 4$. Comme $H_j(z_i) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, $1 \leqslant j \leqslant 2$ et que $\det\widetilde{\mathscr{M}} \neq 0$, $\mathscr{M}'$ est de rang 3 si, et seulement si, $H_1(z_4) = H_2(z_4) = 0$.

IV.C.4a Par exemple, le polynôme $\varpi_1(Z) = Z - u + \dfrac{v}{a^3}(Z^2 - uZ + v) - \dfrac{1}{a^3}(Z^2 - uZ + v)^2$ convient. On prendra donc $\varpi(Z) = -a^3\varpi(Z) = Z^4 - 2uZ^3 + \dots$

IV.C.4b Les zéros sont déjà z_1, z_2 et z_3. Le quatrième est donc $z_1 + z_2 + z_3$. Ils sont simples si, et seulement si, on a $z_1 + z_2 + z_3 \notin \{z_1,\, z_2,\, z_3\}$, c'est-à-dire si, et seulement si, le triangle $M_1M_2M_3$ n'est pas rectangle.

IV.C.5a $\left(\overrightarrow{M_1M_4} \mid \overrightarrow{M_2M_3}\right) = \Re\left((\overline{z_4 - z_1})(z_3 - z_2)\right) = 0$, car $z_4 - z_1 = z_3 + z_2$ notamment.

IV.C.5b Cela montre que M_4 appartient à la hauteur issue de M_1 dans le triangle $M_1M_2M_3$. En écrivant deux autres produits scalaires, on en déduit que M_4 est l'orthocentre de ce triangle. [*Propriété classique des hyperboles équilatères.*]

IV.D On se ramène à l'hypothèse du **IV.C** par une translation du repère, comme en **III.C.1**, suivie d'une rotation d'icelui, aux fins d'obtenir $z_1z_2z_3 = a^3$.

Quel principe général sous-tend ces trois exemples ? Les (équations de) coniques d'un plan affine forment un espace projectif de dimension 5 et les ensembles dont traite l'énoncé en sont des droites projectives. Comme une droite est connue par la donnée de deux points, c'est-à-dire de deux (équations de) coniques Eq_1 et Eq_2, toutes les (équations de) coniques d'un tel ensemble sont des combinaisons linéaires non nulles : $\lambda_1 Eq_1 + \lambda_2 Eq_2$ et ces coniques passent par les points du plan vérifiant Eq_1 **et** Eq_2, de sorte qu'il y a au maximum quatre points communs à toutes les coniques des ensembles envisagés. Dans les exemples *supra*, on avait toujours la présence de trois points communs, d'où l'existence d'un quatrième. À noter aussi que les $\mathscr{E}_i$ sont des droites car toutes les conditions imposées reviennent à quatre équations linéaires indépendantes ; par exemple, le fait pour une conique d'être une hyperbole équilatère fournit une condition (qui équivaut d'ailleurs à la conjugaison des points cycliques I et J par rapport à cette conique).