CENTRALE - 2004 - PC - MATH 1 : corrigé.

Mai 2004

Convergence de séries entières sur le cercle de convergence.

Partie I : Calculs préliminaires

I-A) La première inégalité est standard ; la seconde tient à la concavité de la fonction sinus sur $[0..\pi/2]$.

I-B) La restriction sur x permet de sommer comme suite géométrique :

$$|\sum_{k=p}^{q} e^{ikx}| = |\frac{e^{ipx}.(1-e^{i(q-p+1)x})}{1-e^{ix}}|$$

I-C) Cette question porte sur la transformation d'Abel

$$\begin{aligned} 1)\ \sum_{k=p+1}^{q-1}(u_k-u_{k+1}).V_k &= \sum_{k=p+1}^{q-1}(u_k.V_k) - \sum_{k=p+2}^{q}(u_k.V_{k-1}) \\ &= u_{p+1}.V_{p+1} + \sum_{k=p+2}^{q-1} u_k v_k - (u_q.V_q - u_q.v_q) \qquad car \quad V_k - V_{k-1} = v_k \\ &= u_{p+1}.V_p + \sum_{k=p+1}^{q} u_k.v_k - u_q.V_q \qquad car \quad V_{p+1} = V_p + v_p \end{aligned}$$

d'où : $\sum_{k=p+1}^{q}(u_k.v_k) = \sum_{k=p+1}^{q-1}(u_k-u_{k+1}).V_k + u_q.V_q - u_{p+1}.V_p$

2) **Erreur grossière dans le texte** : *il faut ajouter l'hypothèse* : $u_n \to 0$!
Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n v_n$ converge revient à prouver que $|\sum_{k=p+1}^{q} u_k v_k| \to 0 \quad (p,q\to\infty)$.
Les hypothèses de l'énoncé entrainent par majoration élémentaire que $|\sum_{k=p+1}^{q-1}(u_k-u_{k+1}).V_k| \to 0$ et , si $u_n \to 0$ alors $u_q.V_q - u_{p+1}.V_p \to 0 \quad (p\to\infty)$. La convergence de $\sum u_n.v_n$ est alors conséquence de l'égalité obtenue dans la question précédente.
3) Si (u_n) est décroissante et convergente, alors $\sum_{k=1}^{n}|u_k-u_{k+1}| = u_1 - u_{n+1} \to u_1 - lim(u_n)$, et $u_n \to 0$ permet de conclure, comme au-dessus, à la convergence de $\sum_{k\geq 1}|u_k-u_{k+1}|$.

I-D) Les séries proposées sont les parties réelle et imaginaire de $\sum_{k\geq 1}\frac{e^{ikx}}{k}$; posant $u_k = 1/k$ et $v_k = e^{ikx}$, les conditions d'application de I-C-3) sont réunies (au vu de la majoration I-B)) , donc la série $\sum_{k\geq 1}\frac{e^{ikx}}{k}$ converge *sans utiliser I-C)-2)* .
Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\sum_{k\geq 1}\frac{cos(kx)}{k} = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}$ qui diverge .

Partie II : quelques exemples d'ensembles C_a

II-A) • Si $|z| < 1$ alors $|z.R_a| < R_a$ donc $\sum b_n z^n = \sum a_n (z.R_a)^n$ est absolument convergente
• Si $|z| > 1$ alors $|z.R_a| > R_a$ donc $\sum b_n z^n = \sum a_n (zR_a)^n$ diverge grossièrement .
• $z \in C_a \Leftrightarrow (|z| = R_a$ et $\sum a_n z^n$ converge$) \Leftrightarrow (|z/R_a| = 1$ et $\sum b_n (z/R_a)^n$ converge$) \Leftrightarrow \frac{z}{R_a} \in C_b$

II-B) 1) Si $|z| = R_a = 1$ alors $|a_n z^n| = |a_n|$ donc $z \in C_a$: C_a est le cercle unité .
2) $\forall x \in I$, $|e^{inx}| = 1$ donc $|f_n(x)| = a_n$ et $\sum |f_n(x)| = \sum |a_n$ qui converge : il y a convergence normale donc uniforme de $\sum f_n$ sur I, et la fonction somme est par conséquent continue sur I.

3) On prend $a_n = 1/n^2$.

II-C) Prendre $a_n = 1$.

II-D) 1) • $R_a > 1 \Rightarrow \sum a_n z^n$ est absolument convergente pour $|z| < R_a$ donc en particulier pour z_0, ce qui est faux. Donc $R_a \leq 1$.
• $R_a < 1 \Rightarrow \sum a_n z^n$ diverge grossièrement pour $|z| > R_a$, donc en particulier pour z_0 , ce qui est faux : $R_a \geq 1$.
On conclut $\quad R_a = 1$.
2) • Si $z = \xi$, alors $\sum a_n z^n = \sum 1/n$ est divergente.
• Si $|z| = 1$ et $z \neq \xi$ alors $\frac{z}{\xi} = e^{ix}$ avec $x \notin 2k\pi\mathbb{Z}$ et $\sum a_n (\frac{z}{\xi})^n$ converge par application de I-C-3) et I-B).
On conclut : $\quad C_a$ est le cercle unité privé de ξ .
3) $a_n = \frac{1}{n} . \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\xi_k^n}$ convient évidemment.
4) Prenant $\xi = e^{-i}$ dans II-D-2) on trouve $\frac{cos(n)}{n}$ comme partie réelle du facteur $\frac{1}{n.\xi^n}$ considéré , donc, dans II-D-4) , $R_a = 1$, C_a est le cercle unité privé de e^i (invariance par conjugaison par parité de cos), et $\sum |a_n|$ diverge car dans le cas contraire C_a serait le cercle unité complet.

Partie III : C_a est le cercle unité et $\sum |a_n|$ diverge

Les questions III-A) et III-B) sont des variations sur le critère spécial de séries alternées et la sommation par paquets.

III-A) Il est clair que $|a_n| \sim 1/n$ donc $\sum |a_n|$ diverge.

III-B)1) $|R_N| \leq \sum_{k=p^2}^{N} \frac{1}{p^2} \leq \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{1}{p^2} = \frac{2.p+1}{p^2}$

2) On pose $b_p = \sum_{p^2 \leq n \leq (p+1)^2-1} a_n$; alors $b_p = \sum (-1)^p.K_p$ avec $K_p > 0$ et $K_p \leq \frac{2p+1}{p^2}$ vu la question précédente. La série $\sum b_p$ est convergente d'après le critère spécial des séries alternées. Les sommes partielles de cette série forment une suite convergente et la différence entre une somme partielle de la série $\sum a_n$ et la somme partielle correspondante suivant l'encadrement de l'énoncé de la série $\sum b_p$ est (III-B1)) inférieure à $\frac{2p+1}{p^2}$, qui tend vers zéro . On conclut que la suite des sommes partielles de $\sum a_n$ converge, i.e. que la série $\sum a_n$ converge.

III-C) 1) Dans le cas d'indice n le plus général, $a_{n+1} - a_n = 0$. Le cas "particulier" se produit lorsque $n = (p+1)^2 - 1$ et $n+1 = (p+1)^2$. Dans ce cas : $|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{(p+1)^2} = \frac{2p+1}{p^2.(p+1)^2} \leq \frac{3}{p^3}$, donc $\sum_{n \geq 1} |a_{n+1} - a_n|$ converge .
2) Si $x \in I \backslash \{0\} =]-\pi, 0[\bigcup]0, \pi[$, posant $(u_n) = (a_n)$ et $(v_n) = (e^{inx}) = (z^n)$, on peut appliquer (I-B)) et (I-C-2)), donc $\sum a_n z^n$ converge.

Partie IV : Un dernier exemple

Comme dans la partie III, la série entière considérée converge sur le cercle unité , mais cette fois $\sum a_n$ est grossièrement divergente, alors que dans III elle était semi-convergente.

IV-A) 1) La somme est par définition de k_x à termes ≥ 0 , donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{sin(k.x)}{k} \geq 0$.
Par ailleurs $\frac{sin(k.x)}{k} \leq x.\frac{sin(k.x)}{k.x} \leq x$ donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{sin(k.x)}{k} \leq n.x \leq k_x.x \leq \pi$.
2) On utilise I-C-1) avec $u_k = \frac{1}{k}$ et $v_k = e^{ikx}$; avec I-B) : $|V_k|$, $|V_p|$ et $|V_q|$ sont majorées par $\frac{1}{sin(x/2)}$.
Or (cf I-A)) $sin(x/2) \geq \frac{2}{\pi}.\frac{x}{2} = \frac{x}{\pi}$ d'où $\frac{1}{sin(x/2)} \leq \frac{\pi}{x}$. En utilisant l'inégalité triangulaire dans I-C-1) on obtient :

$$\left| \sum_{k=k_x+1}^{n} \frac{e^{ikx}}{k} \right| \leq \frac{\pi}{x} \left(\sum_{k=k_x+1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{1}{n} + \frac{1}{k_x+1} \right) = \frac{2\pi}{x.(k_x+1)}$$

Or, par définition de k_x : $x.(k_x+1) \geq \pi$ d'où : $\left| \sum_{k=k_x+1}^{n} \frac{e^{ikx}}{k} \right| < 2$.
Il reste à prendre la partie imaginaire pour obtenir : $\left| \sum_{k=k_x+1}^{n} \frac{sin(k.x)}{k} \right| < 2$.

3) $|\sum_{k=1}^{n}\dfrac{sin(k.x)}{k}| \leq |\sum_{k=1}^{k_x}\dfrac{sin(k.x)}{k}|+|\sum_{k=k_x+1}^{n}\dfrac{sin(k.x)}{k}| < \pi+2 = C_1$ (ceci lorsque $n > k_x$; cette inégalité est évidemment vraie si $n \leq k_x$).

Remarque : on a supposé ici $x \in]0,\pi[$ mais, pour $x = 0$, tous les termes sont nuls et on peut toujours se ramener au cas $x \in [0,\pi[$ par périodicité de $|sin(k.x)|$.

IV-B) 1) En mettant X^N en facteur et en remplaçant X par e^{ix} on obtient :

$Q_{n,N}(e^{ix}) = e^{iNx}.(\sum_{k=1}^{n}\dfrac{-e^{ikx}+e^{-ikx}}{k}) = -2ie^{iNx}.\sum_{k=1}^{n}\dfrac{sin(kx)}{k}$.

2) Trivialement $C_2 = 2.C_1 = 2\pi + 4$ convient, vu IV-A-3).

IV-C) Notons que $N_j = 2.n_j$ d'où $I_j = \|2^{j^3}, 3.2^{j3}\|$. Il suffit alors de vérifier que $2^{(j+1)^3} > 3.2^{j^3}$.

IV-D)D'après IV-B-2) , $|P_j(e^{i(x+1/j)})| \leq C_2$. $(B_n(x))$ est donc la suite des sommes partielles d'une série de fonctions majorée en module par $\sum\dfrac{C_2}{j^2}$, par conséquent normalement convergente. Il en résulte que la suite $(B_n(x))$ est une suite de fonctions continues uniformément convergente sur I, donc de limite $F(x)$ continue sur I.

IV-E) Les intervalles I_j sont disjoints (cf IV-C)) et le plus "grand" d'entre eux, obtenu pour j=n , a comme entier maximal 3.2^{n^3} . On ne récupère donc dans $B_n(x)$ des termes en e^{ikx} que pour $k \leq 3.2^{n^3}$. Si un tel k appartient à un intervalle I_j donné , il est obtenu dans P_j avec le coefficient $\dfrac{1}{N_j-k}.e^{i.k/j}$ (cf calcul de IV-B-1) et le fait que la variable dans P_j est $e^{i(x+1/j)}$ et non e^{ix}).

On obtient donc e^{ikx} avec le coefficient $a_k = \dfrac{1}{j^2}.\dfrac{1}{N_j-k}.e^{i.k/j}$, d'où, globalement, $B_n(x) = A_{3.2^{n^3}}(x)$.

IV-F) 1) $N_j - k$ parcourt les entiers de $(-n_j)$ à (-1) et de 1 à n_j , en excluant 0 .

On a donc : $\sum_{k=p}^{q-1}|\alpha_k - \alpha_{k+1}| \leq 2.(1+\sum_{i=1}^{n_j-1}(\dfrac{1}{i}-\dfrac{1}{i+1})) < 4$ (par télescopage).

2) A l'aide de I-C-1) , on procède exactement comme dans IV-A-2) , avec ici $u_k = \alpha_k$ et $v_k = e^{ikx}$.

On obtient ainsi la majoration : $|\sum_{k=p}^{q}\alpha_k e^{ikx}| \leq (4+1+1).\dfrac{\pi}{|x|} = \dfrac{C_3}{|x|}$ avec $C_3 = 6\pi$.

3) • Si x=0, $j \geq 1$ convient ; si $x = \pm\dfrac{1}{n}$, $j > n$ convient ; sinon on prend $j \geq E(\dfrac{1}{|\pi - x|}) + 1$.

• Vu IV-E) , $|A_n(x) - B_j(x)| = |\sum_{k=p}^{q}a_k e^{ikx}|$ avec $2^{j^3} \leq p \leq q = 3.2^{j^3}$

soit : $|A_n(x) - B_j(x)| = \dfrac{1}{j^2}.|\sum_{k=p}^{q}\alpha_k e^{i.k/j}.e^{ikx}| = \dfrac{1}{j^2}.|\sum_{k=p}^{q}\alpha_k e^{ik(x+1/j)}|$.

Pour j (donc n) suffisamment grand on a $x + \dfrac{1}{j} \in I\backslash\{0\}$ et on applique IV-F-2) : $|A_n(x) - B_j(x)| \leq \dfrac{C_2}{j^2.|x+1/j|}$.

•Si $x = \pi$ alors, $\forall j \geq 1$, $x - \dfrac{1}{j} \neq 0$ et $x - \dfrac{1}{j} \in I$; on peut ainsi reprendre le même calcul sous la forme :

$|A_n(x) - B_n(x)| = |\overline{A_n(x)} - \overline{B_n(x)}| = \dfrac{1}{j^2}.|\sum_{k=p}^{q}\alpha_k e^{-i.k/j}e^{-ikx}|$

Or $x = \pi$ donc $e^{-ikx} = e^{ikx}$ et on obtient comme au-dessus :

$$|A_n(x) - B_n(x)| = \dfrac{1}{j^2}.|\sum_{k=p}^{q}\alpha_k e^{-ik(x-1/j)}| \leq \dfrac{C_3}{j^2.|\pi - 1/j|} .$$

4) $\forall\varepsilon > 0$, $\forall x \in I$, $|A_n(x) - F(x)| \leq |A_n(x) - B_j(x)| + |B_j(x) - F(x)| \leq \varepsilon$, ceci pour n assez grand, et donc j assez grand pour respecter IV-D) , j étant lié à n par les conventions de IV-F-3) .

Noter qu'on perd la convergence uniforme sur I mais qu'on peut la conserver sur les segments inclus dans $]-\pi,0[\bigcup]0,\pi[$.

IV-G) *On montre effectivement dans cette question qu'il n'y a pas convergence uniforme au voisinage de 0.*

1) La différence à effectuer permet de ne conserver que les termes de la somme correspondant à la "moitié gauche" de l'intervalle I_j , soit :

$A_{N_j}(-\dfrac{1}{j}) - A_{N_j-n_j-1}(-\dfrac{1}{j}) = \sum_{k=N_j-n_j}^{N_j}a_k e^{-i.k/j} = \dfrac{1}{j^2}.\sum_{k=N_j-n_j}^{N_j}\dfrac{1}{N_j-k} = \dfrac{1}{j^2}.\sum_{k=1}^{2^{j^3}}\dfrac{1}{k}$ (en changeant d'indice).

2) $\sum_{k=1}^{2^{j^3}}\dfrac{1}{k} \sim ln(2^{j^3}) = j^3.ln(2)$ donc l'expression précédente équivaut à j.ln(2) ; en particulier elle ne tend pas vers 0 lorsque $j \to +\infty$, ce qui contredit le critère de Cauchy uniforme au voisinage de 0 : il n'y a pas convergence uniforme de $\sum f_n$ au voisinage de 0.

IV-H) Si $k_a > 1$, il y a convergence uniforme de $\sum f_n$ sur le cercle unité , ce qui est faux par IV-G-2) (pas de convergence uniforme sur le cercle au voisinage de z=1). Donc $R_a \leq 1$. Or on a vu en IV-F-4) que $\sum f_n$ converge simplement sur le cercle unité , donc $R_a \geq 1$ et C_a est extérieur -au sens large- au cercle unté .

Conclusion : $R_a = 1$ et C_a est le cercle unité .