Partie I

I A.

I A.1) $P_2(X) = (1-\alpha-X)(1+\alpha+X)$
et par la règle de Sarrus : $P_3(X) = (1-X)^3 - 2\alpha^2(1-X) = (1-X)(1-\sqrt{2}\alpha - X)(1+\sqrt{2}\alpha + X)$.
Pour A_2 : $Sp(A_2) = \{1-\alpha, 1+\alpha\}$, $E_{1-\alpha} = Vect(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $E_{1+\alpha} = Vect(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.
Pour A_3 : $Sp(A_3) = \{1, 1-\sqrt{2}\alpha, 1+\sqrt{2}\alpha\}$,
$E_1 = Vect\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$, $E_{1-\sqrt{2}\alpha} = Vect\left(\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ et $E_{1+\sqrt{2}\alpha} = Vect\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

I A.2)

I A.3) Pour $n \geq 2$ on peut développer $P_{n+2}(X)$ par rapport à la dernière ligne :

$$P_{n+2}(X) = (1-X)P_{n+1}(X) + \alpha\Delta_{n+1}.$$

Puis Δ_{n+1} se développe par rapport à sa dernière colonne en $\Delta_{n+1} = -\alpha P_n(X)$; d'où la formule :

$$\forall n \geq 2, \quad P_{n+2} = (1-X)P_{n+1}(X) - \alpha^2 P_n(X).$$

I A.4) Soit $u_n = P_n(1)$ alors pour $n \geq 2$ on a $u_{n+2} = -\alpha^2 u_n$.
Or $u_2 = -\alpha^2$ donc pour tout $p \geq 1$ on a $u_{2p} = (-1)^p \alpha^{2p}$, non nul car $\alpha > 0$.
De même $u_3 = 0$ donc $u_{2p+1} = 0$ pour tout $p \geq 1$.

I B. Par hypothèse, x vérifie le système $(A - \lambda I_n)x = 0$.

I B.1) La première ligne s'écrit $(1-\lambda)x_1 - \alpha x_2 = 0$ donc $x_2 = \dfrac{1-\lambda}{\alpha}x_1$.

I B.2) Comme $n \geq 3$, la deuxième ligne est : $-\alpha x_1 + (1-\lambda)x_2 - \alpha x_3 = 0$ donc
$x_3 = -x_1 + \dfrac{1-\lambda}{\alpha}x_2 = -x_1 + \dfrac{(1-\lambda)^2}{\alpha^2}x_1 = \dfrac{(1-\lambda)^2 - \alpha^2}{\alpha^2}x_1 = \dfrac{P_2(\lambda)}{\alpha^2}x_1$.

I B.3) Pour $2 \leq k \leq n-1$, la kème ligne donne $-\alpha x_{k-1} + (1-\lambda)x_k - \alpha x_{k+1} = 0$.
Soit la propriété : HR(k) "pour tout $1 \leq p \leq k-1$, $\quad x_{p+1} = \dfrac{P_p(\lambda)}{\alpha^p}x_1$."
HR(3) est vraie d'après les deux questions précédentes et avec la convention $P_1(X) = 1 - X$;
Si $n = 3$ c'est fini.
Sinon, supposons HR(k) pour un k tel que $3 \leq k \leq n-1$. La relation précédente sur x_{k+1} devient :
$x_{k+1} = \dfrac{1-\lambda}{\alpha}x_k - x_{k-1} = \dfrac{(1-\lambda)P_{k-1}(\lambda) - \alpha^2 P_{k-2}(\lambda)}{\alpha^k}x_1 = \dfrac{P_k(\lambda)}{\alpha^k}x_1$ donc HR($k+1$).
Ainsi HR(n) par récurrence.

I B.4) Pour tout réel λ, la matrice extraite de $A - \lambda I_n$ en supprimant la première ligne et la dernière colonne est inversible (triangulaire supérieure), par conséquent le rang de $A - \lambda I_n$ est au moins $n-1$, exactement $n-1$ si λ est valeur propre. Par le théorème du rang, les espaces propres sont des droites vectorielles.
En outre A_n est diagonalisable (symétrique réelle) donc n égale la somme des dimensions des espaces propres. Par le résultat précédent A_n admet n espaces propres distincts donc n valeurs propres distinctes.

Partie II

II A. ${}^t e_k A e_k = a_{k,k}$ est strictement positif puisque A est définie positive.

II B. En notant $\|x\|$ la norme euclidienne, $0 < {}^t xAx = \lambda {}^t xx = \lambda\|x\|^2$. Puisque x est non nul, $\lambda > 0$.
A est diagonalisable (symétrique réelle) donc son déterminant est égal au produit de ses valeurs propres. Celles ci étant positives, $\det A > 0$.

II C. Les matrices A', A'', B, ${}^tB$ sont respectivement de la taille : $(k,k),(n-k,n-k),(k,n-k),(n-k,k)$.
Le produit par blocs de ${}^tuAu$ est possible et donne :
${}^tuAu = [\,{}^tu' \quad 0\,]\begin{bmatrix} A' & B \\ {}^tB & A'' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u' \\ 0 \end{bmatrix} = [\,{}^tu' \quad 0\,]\begin{bmatrix} A'u' \\ {}^tBu' \end{bmatrix} = {}^tu'A'u'$, strictement positif car A est définie positive :
Vrai pour tout u' donc A' est symétrique définie et positive.

II D.

II D.1) Si M_1 est définie positive alors pour tout u non nul, Qu est non nul (Q est inversible) donc ${}^tuM_2u = {}^t(Qu)M_1(Qu)$ est strictement positif : M_2 est définie positive.
Et réciproquement puisque $M_1 = {}^tQ'M_2Q'$ avec $Q' = Q^{-1}$.

II D.2) Soit D une matrice diagonale (donc symétrique) et $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ ses coefficients.
Si D est définie positive alors les λ_k sont positifs d'après II.A.
Réciproquement si les λ_k sont tous positifs alors pour tout x non nul, il existe un x_j non nul donc ${}^txAx = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k^2 \geq \lambda_j x_j^2 > 0$: D est définie positive.

II D.3) Soit $M \in S_n(\mathbf{R})$. Alors il existe Q orthogonale et D diagonale telles que $M = {}^tQDQ$ et les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de M. Ainsi, des deux questions précédentes on déduit : M est définie positive si et seulement si D est définie positive si et seulement si ses coefficients diagonaux sont positifs si et seulement si les valeurs propres de M sont strictement positives.

II E.

II E.1) Supposons $i_0 = 1$. Alors $|x_2| \leq |x_1|$ et puisque la première ligne du système $(A_n - \lambda In)X = 0$ s'écrit $(1-\lambda)x_1 - \alpha x_2 = 0$ on en déduit $|1-\lambda||x_1| = \alpha|x_2| \leq \alpha|x_1|$. Donc $|1-\lambda| \leq \alpha$ ($|x_1| > 0$ car x est vecteur propre donc non nul). De même si $i_0 = n$ en considérant la dernière ligne.

II E.2) Si $2 \leq i_0 \leq n-1$, la ligne i_0 fournit : $-\alpha x_{i_0-1} + (1-\lambda)x_{i_0} - \ ax_{i_0+1} = 0$ d'où
$|1-\lambda||x_{i_0}| = \alpha(|x_{i_0-1}| + |x_{i_0+1}| \leq 2\alpha|x_{i_0}|$ soit $|1-\lambda| \leq 2\alpha$.

II E.3) La condition $\alpha < 1/2$ entraine dans tous les cas $|1-\lambda| < 1$ donc $0 < \lambda < 2$.
II.D.3. permet alors de conclure : A_n est définie positive.

Partie III

III A. $L^tL = \begin{bmatrix} r^2 & rs \\ rs & s^2+t^2 \end{bmatrix}$ donc $r = \sqrt{a}$, $s = b/\sqrt{a}$, $t = \sqrt{(ad-b^2)/a}$. (possible car a et $\det M$ sont strictement positifs). L'unicité vient de la positivité de r et t.

III B.

III B.1) M_1 est, comme M, symétrique définie positive, donc son déterminant est strictement positif (II.B.) elle est bien inversible.

III B.2) Toute matrice triangulaire inférieure L d'ordre n s'écrit $\begin{bmatrix} L' & 0 \\ {}^tw & \mu \end{bmatrix}$ avec L' triangulaire d'ordre $n-1$.
Sous cette forme, le produit par blocs conduit à : $L^tL = \begin{bmatrix} L' & 0 \\ {}^tw & \mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {}^tL' & w \\ {}^t0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L'^tL' & L'w \\ {}^tw^tL' & {}^tww+\mu^2 \end{bmatrix}$.
Donc $L^tL = M$ si et seulement si $\begin{cases} L'^tL' = M_1 \\ L'w = x \\ {}^tww + \mu^2 = m \end{cases}$.
La condition sur les coefficients diagonaux de L donc de L' impose L' (propriété $\mathcal{P}(n-1)$).
Et comme $L'w = x$ équivaut à $w = L'^{-1}x$ on peut conclure :

$$L \text{ satisfait } \mathcal{P}(n) \text{ si et seulement si : } \begin{cases} L' \text{ satisfait } \mathcal{P}(n-1) \text{ pour } M_1 \\ L'w = x \\ \mu^2 = m - {}^txM_1^{-1}x \end{cases}.$$

III B.3) Si $m - {}^txM_1^{-1}x > 0$ et si $\mathcal{P}(n-1)$, alors le système précédent admet une unique solution en $L', x, \mu > 0$ donc en L d'où $\mathcal{P}(n)$.

III C.

III C.1) En remplaçant la colonne C_n par $C_n - \sum_{k=1}^{n-1} x_k C_k$ on obtient

$$\det A = m - {}^t yx.$$

III C.2) ***a.*** $\begin{bmatrix} I_{n-1} & x \\ {}^t x M_1^{-1} & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ {}^t 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & x \\ {}^t x & m \end{bmatrix} = M.$

b. A l'aide du résultat précédent, le calcul des déterminants conduit à : $(m - {}^t x M_1 x) \det M_1 = \det M$. Mais M et M_1 sont de déterminant > 0 car toutes deux définies positives. M vérifie bien (2). Ce qui permet de conclure par récurrence que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie pour tout ordre $n \geq 1$.

III D. Algorithme récursif de calcul de L, n désigne l'ordre de la matrice M :
procédure décomposition(M, n)
si $n = 1$ alors $L \longleftarrow [\sqrt{M[1,1]}]$
sinon extraire M_1, x, m de M
$L_1 \longleftarrow$décomposition$(M_1, n-1)$
$w \longleftarrow L_1^{-1} x$
$\mu \longleftarrow \sqrt{m} - {}^t ww$
$L \longleftarrow matriceblocs(L_1, 0, {}^t w, \mu)$
fin si
fin procédure

Partie iv

IV A.

IV A.1) L' est inversible (triangulaire à termes diagonaux non nuls), la solution est donc unique.
On trouve $w_1 = \cdots = w_{n-2} = 0$ et $w_{n-1} = x_{n-1}/l_{n-1,n-1}$.

IV A.2) Pour $n = 2$ le résultat est acquis (toute matrice est tridiagonale). Supposons le pour $n-1$ et soit M d'ordre n tridiagonale. Alors M_1 l'est aussi donc L' également d'après l'hypothèse de récurrence. De plus x est de la forme IV.A.1) donc ${}^t w = (0, \ldots, 0, w_{n-1})$. La matrice L est donc tridiagonale.

IV B.

IV B.1) $L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & \sqrt{1-\alpha^2} \end{bmatrix}$ et $L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & \sqrt{1-\alpha^2} & 0 \\ 0 & \frac{-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} & \sqrt{\dfrac{1-2\alpha^2}{1-\alpha^2}} \end{bmatrix}.$

IV B.2) ***a.*** A_n est inversible donc la solution est unique.

b. Clair

c. Résolution de $L_n y = b$: 1 division pour y_1 puis pour chacune des autres inconnues 1 division, 1 soustraction, 1 multiplication. L'autre système est analogue (on commence par x_n).
Total : 2(n div, (n-1) soust, (n-1) mult) soit $2(3n-2)$ opérations.

Partie v

V A.

V A.1) M_4 existe car $\phi^{(4)}$ est continue sur le compact $[a, b]$.
Pour $\theta > 0$, par l'inégalité de la moyenne : $\left| \int_0^\theta \frac{(\theta - t)^3}{3!} \phi^{(4)}(z+t) dt \right| \leq M_4 \int_0^\theta \frac{(\theta - t)^3}{3!} dt = M_4 \frac{\theta^4}{4!}$
De même pour $\theta < 0$.

V A.2) En notant $I(\theta)$ le reste intégral, $\phi(z+\theta) + \phi(z-\theta) = 2\phi(z) + \theta^2 \phi''(z) + I(\theta) + I(-\theta)$.
Ainsi $R_z(\theta) = -\dfrac{I(\theta) + I(-\theta)}{\theta^2}$ donc $|R_z(\theta)| \leq \dfrac{M_4 \theta^2}{12}$.

V B.

V B.1) $\mathcal{H}$ est linéaire homogène à coefficients constants, l'expression générale des solutions est :

$$u : t \mapsto a\,\mathrm{ch}(\omega t) + b\,\mathrm{sh}(\omega t), \qquad (a,b) \in \mathbf{R}^2.$$

V B.2) L'expression générale des solutions de $\mathcal{E}$ est donc : $u : t \mapsto u_0(t) + a\,\mathrm{ch}(\omega t) + b\,\mathrm{sh}(\omega t), \qquad (a,b) \in \mathbf{R}^2$.
Les conditions $u(0) = a_0$ et $u(1) = a_1$ imposent : $\begin{cases} a = a_0 - u_0(0) \\ a\,\mathrm{ch}(\omega) + b\,\mathrm{sh}(\omega) = a_1 - u_0(1) \end{cases}$, système en (a,b) à solution unique. Le problème (4) admet une et une seule solution.

V B.3) Toute solution u de $\mathcal{E}$ est continue car dérivable. De $u'' = g + \omega^2 u$ il vient u'' continue donc u est C^2. g est C^2 donc u'' l'est aussi : u est C^4.

V C.

V C.1) En posant $x_0 = a_0$ et $x_{n+1} = a_1$, le système (5) s'écrit :
$x_{k+1} - (2 + \omega^2\theta^2)x_k - x_{k-1} = \theta^2 g(t_k), \qquad k = 1, \ldots, n.$
Soit en posant $\alpha = \dfrac{1}{2 + \omega^2\theta^2}$, $-\alpha x_{k-1} + x_k - \alpha x_{k+1} = -\alpha\theta^2 g(t_k), \qquad k = 1, \ldots, n.$
b est donc défini par : $\begin{cases} b_k = -\alpha\theta^2 g(t_k), \qquad k = 2, \ldots, n-1 \\ b_1 = -\alpha(\theta^2 g(t_1) - a_0), \quad b_n = -\alpha(\theta^2 g(t_n) - a_1) \end{cases}$.

V C.2) $\alpha < 2$ donc A_n est inversible : x existe et est unique.

V C.3)

$$\alpha = \frac{1}{3}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{-1}{3} & \dfrac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 0 & -\dfrac{\sqrt{2}}{4} & \dfrac{\sqrt{14}}{4} \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{15} \\ \dfrac{-1}{18} \\ \dfrac{2}{7} \end{bmatrix}$$

$$u(1/4) = -29/490, \quad u(2/4) = 11/490, \quad u(3/4) = 431/1470$$