MATHÉMATIQUES II

Le but du problème est la recherche des plans stables par un endomorphisme, en relation avec la notion de produit vectoriel

Dans tout le problème,

- les espaces vectoriels $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^6$ sont munis de leur produit scalaire canonique et orientés par leur base canonique,
- on désigne par $\langle x, y\rangle$ ou $x \cdot y$ le produit scalaire de deux vecteurs x, y d'un espace vectoriel euclidien, par $\|.\|$ la norme associée,
- on désigne par $\wedge$ le produit vectoriel défini pour un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

Les vecteurs dans les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ sont notés en colonnes, mais on leur préférera la notation ${}^t(\ldots)$, transposée d'une ligne, lorsqu'ils seront de grande taille.

Partie I - Étude dans E euclidien orienté de dimension 3

On considère dans cette partie $E = \mathbb{R}^3$ espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ orthonormale directe. Si u est dans $\mathcal{L}(E)$ on définit $\tilde{u}$, endomorphisme de E, par sa restriction à $\mathcal{B}$:

$$\begin{cases} \tilde{u}(e_1) = u(e_2) \wedge u(e_3) \\ \tilde{u}(e_2) = u(e_3) \wedge u(e_1) \\ \tilde{u}(e_3) = u(e_1) \wedge u(e_2) \end{cases}$$

I.A - Dans cette question on considère les endomorphismes $u_1, u_2 \in \mathcal{L}(E)$, de matrices respectives U_1 et U_2 dans la base $\mathcal{B}$:

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer $\tilde{U}_1$ et $\tilde{U}_2$, matrices respectives dans la base $\mathcal{B}$ de $\tilde{u}_1$ et $\tilde{u}_2$.

Filière PC

I.B - Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\forall (x,y) \in E^2$, $\widetilde{u}(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y)$. Montrer que si v dans $\mathcal{L}(E)$ vérifie $\forall (x,y) \in E^2$, $v(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y)$, alors $v = \widetilde{u}$.

I.C - Déterminer $\widetilde{Id}_E$.
Si u et v sont dans $\mathcal{L}(E)$, montrer que $\widetilde{u \circ v} = \widetilde{u} \circ \widetilde{v}$.
Si u est inversible, en conclure que $\widetilde{u}$ est inversible et en exprimer l'inverse.

I.D - Si u appartient à $\mathcal{L}(E)$ et a comme matrice U dans la base $\mathcal{B}$, exprimer la matrice $\widetilde{U}$ de $\widetilde{u}$ dans la base $\mathcal{B}$ en fonction de $\mathrm{com}(U)$, comatrice de la matrice U.

Montrer que $u^* \circ \widetilde{u} = \det(u) Id_E$ où u^* désigne l'adjoint de u.

Montrer que $\widetilde{u}$ et u^* commutent.

Montrer que $\widetilde{u^*} = (\widetilde{u})^*$.

I.E - On considère toujours u dans $\mathcal{L}(E)$.

I.E.1) Dans le cas où u est inversible, déterminer une expression de $\det(\widetilde{u})$ en fonction de $\det(u)$, et de $(\widetilde{u})^{-1}$ en fonction de u^* et de $\det(u)$.

I.E.2) Dans le cas où u n'est pas inversible, déterminer $\mathrm{Ker}(\widetilde{u})$ puis $\det(\widetilde{u})$.

I.F - Préciser le rang de $\widetilde{u}$ selon la valeur de celui de u. L'application de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même qui à u associe $\widetilde{u}$ est-elle : linéaire ? injective ? surjective ?

Partie II - Recherche des plans stables par u endomorphisme de E

On conserve dans cette partie les notations de la précédente.

II.A - Soit u dans $\mathcal{L}(E)$ et $P = \mathrm{Vect}(x,y)$ un **plan** stable par u.
Montrer que $x \wedge y$ est vecteur propre de $\widetilde{u}$; exprimer la valeur propre associée à $x \wedge y$ à l'aide de $u|_P$.

II.B - Inversement, soit z un vecteur propre de norme 1 de $\widetilde{u}$.
Montrer qu'il existe (x,y) famille orthonormale dans E telle que $x \wedge y = z$.

Si la valeur propre associée à z est non nulle, montrer que $P = \mathrm{Vect}(x,y)$ est stable par u. On pourra remarquer que (x, y, z) est une base orthonormale directe de E et effectuer des calculs dans cette base.

II.C - Soit u dans $\mathscr{L}(E)$. Montrer que 0 est valeur propre de u si, et seulement si, 0 est valeur propre de $\widetilde{u}$. Montrer que, pour tout réel λ, les plans stables par u sont les plans stables par $u - \lambda Id_E$. En déduire un moyen pour obtenir les plans stables par u dans $\mathscr{L}(E)$ n'ayant pas 0 comme valeur propre, puis par u quelconque dans $\mathscr{L}(E)$.

II.D - Appliquer cette méthode à la recherche des plans respectivement stables par les deux endomorphismes u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^3$ définis à la question I.A.

Certaines démonstrations dans les parties qui suivent sont analogues à celles demandées dans les deux précédentes et, de ce fait, certains résultats seront admis.

Partie III - Définition et étude d'un produit vectoriel de $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^6$

On munit $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ de leurs structures euclidiennes canoniques et on les oriente grâce à leurs bases canoniques.

À un vecteur

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ de } \mathbb{R}^4\text{, on associe } l(X) = x_1 \text{ et } L(X) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix},$$

de sorte que l'on écrira, par blocs,

$$X = \begin{pmatrix} l(X) \\ L(X) \end{pmatrix}.$$

On définit alors, pour X et Y dans $\mathbb{R}^4$, $X \times Y$ comme suit :

si $X = \begin{pmatrix} a \\ \xi \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a' \\ \xi' \end{pmatrix}$, où $a, a' \in \mathbb{R}$ et $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^3$, alors $X \times Y$ est le

vecteur de $\mathbb{R}^6$ défini par les blocs $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, avec $A = a\xi' - a'\xi$ et $B = \xi \wedge \xi'$,

ce dernier produit vectoriel étant le produit vectoriel canonique de $\mathbb{R}^3$.

On admettra sans démonstration que $\times$ *est une application bilinéaire antisymétrique de* $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ *dans* $\mathbb{R}^6$.

III.A - Trouver une condition nécessaire et suffisante sur X et Y dans $\mathbb{R}^4$ pour que $X \times Y = 0$.

Soient p et p' les applications linéaires de $\mathbb{R}^6$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_6 \end{pmatrix} \text{ associent respectivement}$$

$$p(\Sigma) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_3 \end{pmatrix} \text{ et } p'(\Sigma) = \begin{pmatrix} \xi_4 \\ \vdots \\ \xi_6 \end{pmatrix}.$$

III.B - Soit Σ dans $\mathbb{R}^6$, de la forme $X \times Y$, où X et Y sont dans $\mathbb{R}^4$; montrer que

$$\langle p(\Sigma), p'(\Sigma) \rangle = 0 \quad (\mathscr{C})$$

III.C - Soit, inversement, Σ dans $\mathbb{R}^6$ vérifiant $(\mathscr{C})$; on pose $A = p(\Sigma)$ et $B = p'(\Sigma)$.

III.C.1) Si $B \neq 0$ et si C dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ vérifient $C \cdot B = 0$, trouver tous les X, Y dans $\mathbb{R}^4$ tels que $X \times Y = \Sigma$ et $L(X) = C$.

III.C.2) Exemple : si $\Sigma = {}^t(2 \;\; 2 \;\; 4 \;\; 4 \;\; 0 \;\; -2)$ et $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, déterminer tous les X, Y correspondants.

III.C.3) Si $B \neq 0$, décrire tous les X, Y dans $\mathbb{R}^4$ tels que $X \times Y = \Sigma$.

III.C.4) Enfin, si $B = 0$, décrire tous les X, Y dans $\mathbb{R}^4$ tels que $X \times Y = \Sigma$. Si $\Sigma \neq 0, B = 0$ et $X \times Y = \Sigma$, donner une description simple de $\mathrm{Vect}(X, Y)$ à l'aide notamment de A.

III.D - Trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur a, a', ξ, ξ', pour que la famille (X, Y) définie par

$$X = \begin{pmatrix} a \\ \xi \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} a' \\ \xi' \end{pmatrix}$$

soit orthonormale dans $\mathbb{R}^4$. Dans ce cas, exprimer $\|a\xi' - a'\xi\|^2$ et $\|\xi \wedge \xi'\|^2$ en fonction de (a, a') seulement. En déduire que $\|X \times Y\|^2 = 1$.

III.E - Soit X, Y, Z, T dans $\mathbb{R}^4$ tels que $X \cdot T = Y \cdot T = 0$. Simplifier l'expression $(X \times Y) \cdot (Z \times T)$.

On pourra utiliser la formule suivante, valable pour ξ, ξ', ξ'', ξ''' vecteurs dans $\mathbb{R}^3$,

$$(\xi \wedge \xi') \cdot (\xi'' \wedge \xi''') = (\xi \cdot \xi'')(\xi' \cdot \xi''') - (\xi \cdot \xi''')(\xi' \cdot \xi'')$$

III.F - En déduire que si $(e_1, \ldots, e_4)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$, alors $\widetilde{\mathscr{B}} = (e_i \times e_j)_{1 \leq i < j \leq 4}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^6$. Déterminer $\widetilde{\mathscr{B}}$ lorsque $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Partie IV - Endomorphisme $\tilde{u}$ de $\mathbb{R}^6$ associé à un endomorphisme u de $\mathbb{R}^4$ et détermination des plans stables par u

Si u est dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$, on admet qu'il existe un unique $\tilde{u}$ dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^6)$ tel que l'on ait

$$\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^4)^2, \quad \tilde{u}(X \times Y) = u(X) \times u(Y)$$

On admet également que $\widetilde{u \circ v} = \tilde{u} \circ \tilde{v}$, pour u et v dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$.

IV.A - Si u est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^4$, montrer que $\tilde{u}$ est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^6$; on pourra utiliser **III.F.**

IV.B - Si u est un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^4$, justifier l'existence d'une base orthonormale directe $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ formée de vecteurs propres de u associés à des valeurs propres notées $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$; exprimer alors la matrice de $\tilde{u}$ dans la base $\widetilde{\mathscr{B}}$ et en déduire que $\tilde{u}$ est autoadjoint.

On admet que, pour tout endomorphisme u de $\mathbb{R}^4$, il existe s et w, endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ respectivement autoadjoint et orthogonal et tels que $u = s \circ w$.

IV.C - Montrer que, pour tout u dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$, $\widetilde{u^*} = (\tilde{u})^*$.

IV.D - Soit u dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ et $P = \mathrm{Vect}(X, Y)$ un plan vectoriel stable par u ; montrer que $X \times Y$ est un vecteur propre de $\tilde{u}$.

IV.E - Exemple : on donne u dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ défini par

$$X \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X$$

IV.E.1) Déterminer u^2 ; u a-t-il des vecteurs propres ?

IV.E.2) Soit X un vecteur non nul de $\mathbb{R}^4$. Montrer que $P = \mathrm{Vect}(X, u(X))$ est un plan stable par u. Montrer qu'inversement tout plan stable par u est de cette forme.

IV.E.3) Si $X = {}^t(x, y, z, t)$ est non nul dans $\mathbb{R}^4$, déterminer par ses composantes dans la base canonique le vecteur propre $\varphi(X) = X \times u(X)$ de $\tilde{u}$ ainsi obtenu.

IV.E.4) Montrer que $(\tilde{u})^2 = Id_{\mathbb{R}^6}$ et vérifier que deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^6$ sont des vecteurs propres de $\tilde{u}$.

IV.E.5) Déterminer la matrice $\tilde{M}$ de $\tilde{u}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^6$; on pourra exprimer $\tilde{u}(X \times Y)$ pour $X = {}^t(x, y, z, t)$ et $Y = {}^t(x', y', z', t')$ quelconques dans $\mathbb{R}^4$.

IV.E.6) La matrice $\tilde{M}$ est-elle diagonalisable ?

IV.E.7) Déterminer les ensembles

$$E_{+1} = \left\{\Sigma \in \mathbb{R}^6, \quad \tilde{M}\Sigma = \Sigma\right\} \text{ et } E_{-1} = \left\{\Sigma \in \mathbb{R}^6, \quad \tilde{M}\Sigma = -\Sigma\right\}.$$

En déduire les valeurs propres de $\tilde{M}$ ainsi que leurs ordres de multiplicité.

IV.E.8) Vérifier que, dans E_{-1}, seul le vecteur nul satisfait à $(\mathscr{C})$.

IV.E.9) Vérifier que, dans E_{+1}, le vecteur Σ satisfait à $(\mathscr{C})$ si, et seulement si, il est de la forme ${}^t(a, b, c, d, -b, -c)$, où $ad = b^2 + c^2$.

IV.E.10) Vérifier que tous les vecteurs de la forme $\varphi(X)$ obtenus en IV.E.3 sont bien de cette forme.

••• FIN •••
