Corrigé par Jean-Denis EIDEN — lycée FABERT, METZ —

Thème : réalisations respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^6$ comme puissances extérieures secondes de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^4$.

Partie I

I.A. On obtient $\widetilde{U_1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\widetilde{U_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

I.B. La première sous-question se traite par un calcul mécanique. Pour la seconde, on montre que v et $\widetilde{u}$ coïncident sur $\mathcal{B}$.

Par le biais du produit vectoriel ≪interne≫, un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 se réalise naturellement comme sa propre puissance extérieure seconde. Dès lors, l'existence de $\widetilde{u}$ n'a rien de miraculeux : elle découle de la propriété universelle de la puissance extérieure, du fait que $(x,y) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2 \longmapsto u(x) \wedge u(y)$ est une application bilinéaire alternée.

I.C. $\widetilde{I_E} = I_E$; la deuxième sous-question découle de $(\widetilde{u} \circ \widetilde{v})(e_1) = \widetilde{u}(v(e_2) \wedge v(e_3)) = uv(e_2) \wedge uv(e_3)$, etc. On en conclut que, si u est inversible, $\widetilde{u}$ l'est aussi et que l'inverse en est $\widetilde{u^{-1}}$.

I.D. On a tout de suite $\widetilde{U} = \mathrm{Com}(U)$, à vérifier composante par composante. On en conclut que

$$M_{\mathcal{B}}(u^* \circ \widetilde{u}) = {}^tU \times \mathrm{Com}(U) = \det U \,.\, \mathbb{I}_3$$

et cela montre que $u^* \circ \widetilde{u} = \det u \,.\, \mathbb{I}_E$. On a aussi $\widetilde{u} \circ u^* = \det u \,.\, \mathbb{I}_E$ car toute matrice carrée commute avec la transposée de sa comatrice. Enfin, $\widetilde{u^*} = (\widetilde{u})^*$ résulte du fait que la comatrice de ${}^tU$ est la transposée de celle de U.

I.E1. De $\det u^* \,.\, \det \widetilde{u} = (\det u)^3$, on déduit que $\det u = (\det u)^2$ si $u \in \mathrm{GL}(E)$, et $(\widetilde{u})^{-1} = \dfrac{u^*}{\det u}$ résulte de **I.D**.

I.E2. Si $\mathrm{rg}\, u \leqslant 1$, on a $\widetilde{u} = 0$, d'où $\mathrm{Ker}\, \widetilde{u} = E, \det \widetilde{u} = 0$. Si $\mathrm{rg}\, u = 2$, $\widetilde{u} \circ u^* = \det u \,.\, \mathbb{I}_E$ montre que $\mathrm{Im}\, u^* \subset \mathrm{Ker}\, \widetilde{u}$; en outre, $\widetilde{u} \neq 0$, de sorte que $\mathrm{Ker}\, \widetilde{u} = \mathrm{Im}\, u^* = (\mathrm{Ker}\, u)^{\perp}$. On a aussi $\det \widetilde{u} = 0$ car le noyau de $\widetilde{u}$ est non trivial.

I.F. Récapitulons : $\begin{cases} \mathrm{rg}\, u \leqslant 1 \Longrightarrow \mathrm{rg}\, \widetilde{u} = 0 \\ \mathrm{rg}\, u = 2 \Longrightarrow \mathrm{rg}\, \widetilde{u} = 1 \\ \mathrm{rg}\, u = 3 \Longrightarrow \mathrm{rg}\, \widetilde{u} = 3 \end{cases}$

$u \longmapsto \widetilde{u}$ n'est pas

- linéaire, car $\widetilde{\lambda \mathbb{I}_E} = \lambda^2 \widetilde{\mathbb{I}_E} \neq \lambda \widetilde{\mathbb{I}_E}$ si $\lambda \neq 0 \neq 1$,
- injective car $\widetilde{0_E} = 0_E$, alors que $\widetilde{u} = 0_E \not\Longrightarrow u = 0_E$,
- surjective, car $\widetilde{u}$ n'est jamais de rang 2.

Remarque : on vérifie que l'on a en outre $\widetilde{\widetilde{u}} = \det u \times u$, de sorte qu'un automorphisme v est de la forme $\widetilde{u}$ si, et seulement si, il a un déterminant > 0.

Partie II

II.A. S'il existe a, b, c, d réels tels que $u(x) = ax + by$ et $u(y) = cx + dy$, alors $\widetilde{u}(x \wedge y) = (ad - bc) x \wedge y$; de cela suit que le vecteur non nul $x \wedge y$ est vecteur propre de $\widetilde{u}$, associé à la valeur propre $ad - bc = \det\, (u|_P)$.

II.B. On choisit x de norme 1 et orthogonal à z ; alors $\mathcal{B}' = \{x, y = z \wedge x, z\}$ est une base orthonormale directe de E. Si $U = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}$ est la matrice de u dans $\mathcal{B}'$, alors celle de $\widetilde{u}$ est de la forme

$\widetilde{U} = \begin{pmatrix} * & * & dh-eg \\ * & * & gb-ah \\ * & * & ae-bd \end{pmatrix}$. Comme z est vecteur propre, on a $\begin{cases} dh-ge &= 0 \\ gb-ah &= 0 \\ ae-bd &= \lambda \neq 0 \end{cases}$

Le système $\begin{cases} -ge+dh &= 0 \\ gb-ah &= 0 \end{cases}$ en les inconnues (g,h) est de Cramer et son unique solution est $(0,0)$. Ainsi, $\mathrm{Vect}\,(x,y) = (\mathrm{Vect}\,z)^{\perp}$ est stable par u.

II.C. $0 \notin \mathrm{Sp}\,\widetilde{u} \iff 0 \notin \mathrm{Sp}\,u$ résulte de **I.E.1.** et **I.E.2.** ; en outre, u et $u - \lambda\mathbb{I}_E$ ont manifestement les mêmes plans stables, de sorte que

- si $u \in \mathrm{GL}\,(E)$, **II.A.** et **II.B.** fournissent une condition nécessaire et suffisante pour que $P = \mathrm{Vect}\,(x,y)$ soit stable par u,
- sinon, on choisit $\lambda \notin \mathrm{Sp}\,u$ et on procède de même avec $u - \lambda\mathbb{I}_E$ qui a les mêmes plans stables que u.

II.D. $u_1 \in \mathrm{GL}\,(E)$, $\chi_{u_1}(X) = (1-X)^3$ et $\mathrm{Ker}(\widetilde{u_1} - \mathbb{I}_E) = \mathrm{Vect}\,({}^t(1,\,-1,1))$. Donc, u_1 a un seul plan stable, d'équation $x_1 - x_2 + x_3 = 0$, qui est l'image de $u_1 + \mathbb{I}_E$. Ensuite, $u_2 \notin \mathrm{GL}\,(E)$, mais $u_2 - \mathbb{I}_E \in \mathrm{GL}\,(E)$; la matrice canonique de $\widetilde{u_2 - \mathbb{I}_E}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ qui a 1 pour seule valeur propre *réelle*. On obtient alors un seul plan stable, d'équation $x_1 - x_3 = 0$, et qui est d'ailleurs l'image de u_2.

Partie III

III.A. On a facilement $X \times Y = 0 \iff \{X,Y\}$ liée.

III.B. La relation est immédiate.

III.C1. Cherchons X et Y sous la forme $\begin{pmatrix} a \\ C \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' \\ C' \end{pmatrix}$. Alors $X \times Y = \Sigma \iff \begin{cases} aC' - a'C &= A \\ C \wedge C' &= B \end{cases}$

Or, $C \wedge C' = B \iff \exists \mu \in \mathbb{R}, C' = \dfrac{B \wedge C}{\|C\|^2} + \mu C$. Pour tout C' de cette forme, on a $\mathrm{Vect}(C,C') = (\mathrm{Vect}(B))^{\perp}$. Comme $(A\,|\,B) = 0$, il existe $(a,a') \in \mathbb{R}^2$ (unique) tel que $aC' - a'C = A$.

À défaut de connaître le problème de la division vectorielle, on peut remarquer que, pour $x \in \mathbb{R}^3$ non nul fixé, l'endomorphisme $y \longmapsto x \wedge y$ de $\mathbb{R}^3$ a pour noyau $\mathrm{Vect}(x)$ *et pour image* $(\mathrm{Vect}(x))^{\perp}$.

III.C2. Un calcul simple, suivant **III.C1.**, montre que l'ensemble cherché est

$$\left\{X = {}^t(1,0,1,0), Y = {}^t(y-2,2,y,4)\right\}_{y\in\mathbb{R}}$$

III.C3. Si $B \neq 0$, on se ramène à **III.C1.** pour tout choix de $C \in (\mathrm{Vect}(B))^{\perp}\backslash\{0\}$. On ne peut choisir $C = 0$.

III.C4. Si $B = 0$, on cherche (X,Y) comme en **III.C1.** Alors, $X \times Y = \Sigma \iff \begin{cases} aC' - a'C &= A \\ C \wedge C' &= 0 \end{cases}$

Le cas $A = 0$ a été vu en **III.A.** Si $A \neq 0$,

- les solutions avec $C = 0$ sont de la forme $X = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} a' \\ A/a \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}^*$,
- les solutions avec $C \neq 0$ sont de la forme $X = \begin{pmatrix} a \\ C \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} a\lambda - 1/\mu \\ \lambda\mu A \end{pmatrix}$, avec $\mu \neq 0$.

Dans tous les cas, on montre que $\mathrm{Vect}(X,Y)$ est l'ensemble des Z tels que $L(Z) \in \mathrm{Vect}(A)$.

Remarque : on a établi, en **III.C.**, *la réciproque de* **III.B.**, *à savoir que ($\mathcal{C}$) caractérise les $Z \in \mathbb{R}^6$ qui sont de la forme $X \times Y$.*

III.D. Une condition nécessaire et suffisante est

$$\begin{cases} aa' + (\xi \,|\, \xi') = 0 \\ a^2 + \|\xi\|^2 = a'^2 + \|\xi'\|^2 = 1 \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{cases} \|a\xi' - a'\xi\|^2 = a^2 + a'^2 \\ \|\xi \wedge \xi'\|^2 = \|\xi\|^2 \|\xi'\|^2 - (\xi \,|\, \xi')^2 = 1 - a^2 - a'^2 \end{cases}$$

de sorte que $X \times Y$ est de norme 1.

III.E. La formule admise donne tout de suite $(X \times Y \,|\, Z \times T) = 0$.

III.F. Vu **III.D.**, les $e_i \times e_j$ sont de norme 1. Si, par exemple, $i \neq l$ et $j \neq l$, $(e_i \times e_j \,|\, e_k \times e_l) = 0$ vu **III.E.**
Lorsque $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et $\mathcal{B}_0 = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_6\}$ celle de $\mathbb{R}^6$, un calcul simple montre que $\widetilde{\mathcal{B}}$ est la famille $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_6, -\varepsilon_5, \varepsilon_4\}$ si on ordonne les $e_i \times e_j$ par l'ordre lexicographique.

Partie IV

IV.A. C'est immédiat.

IV.B. L'existence de $\mathcal{B}$ est du cours. $M_{\widetilde{\mathcal{B}}}\widetilde{u}$ est alors diagonale. Comme $\widetilde{\mathcal{B}}$ est une base orthonormale, $\widetilde{u}$ est autoadjoint.

IV.C. Si $u = s \circ w$, comme $\widetilde{w}$ est orthogonal, $\widetilde{u} = \widetilde{s} \circ \widetilde{w}$ et $(\widetilde{u})^* = (\widetilde{w})^{-1} \circ \widetilde{s}$. De même, $u^* = w^{-1} \circ s$ et $\widetilde{u^*} = (\widetilde{w})^{-1} \circ \widetilde{s}$.

IV.D. C'est immédiat, vu la bilinéarité de $\times$.

IV.E1. On a $u^2 = -\mathbb{I}_{\mathbb{R}^4}$ et u n'a pas de valeur propre, car le polynôme annulateur $X^2 + 1$ n'a pas de zéro réel.
IV.E2. P est un plan, vu **IV.E1.**, et il est stable par u. Inversement, si $X \neq 0 \in P$, où P est un plan stable par u, $u(X) \in P$ et $\{X, u(X)\}$ est libre dans P, donc en est une base.
IV.E3. $\varphi(X) = {}^t(x^2 + y^2, yz - xt, xz + yt, z^2 + t^2, xt - yz, -xz - yt)$.
IV.E4. L'égalité résulte de $u^2 = -\mathbb{I}_{\mathbb{R}^4}$ et $\widetilde{-\mathbb{I}_{\mathbb{R}^4}} = (-1)^2 \mathbb{I}_{\mathbb{R}^6}$. Aux plans stables $\mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$ et $\mathrm{Vect}\,(e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ correspondent les deux vecteurs propres $\varepsilon_1 = e_1 \times e_2$ et $\varepsilon_4 = e_3 \times e_4$ de $\mathbb{R}^6$.
IV.E5. On obtient facilement la matrice à la fois symétrique et orthogonale

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

IV.E6. $\widetilde{M}$ est diagonalisable en tant que matrice d'involution (la caractéristique est différente de 2), ou en tant que matrice symétrique réelle.
IV.E7. On obtient facilement

$$\begin{cases} E_1 &= \left\{\Sigma \in \mathbb{R}^6 \mid x_5 = -x_2 \text{ et } x_6 = -x_3\right\} \\ E_{-1} &= \left\{\Sigma \in \mathbb{R}^6 \mid x_1 = x_4 = 0, x_5 = x_2, x_6 = x_3\right\} \end{cases}$$

de sorte que 1 est valeur propre quadruple et -1 valeur propre double de $\widetilde{u}$ puisque $\widetilde{M}$ est diagonalisable.
IV.E8. C'est immédiat. **Cela montre qu'à un vecteur propre de $\widetilde{u}$ peut ne pas correspondre de plan stable par u, à la différence de ce qui se produit dans $\mathbb{R}^3$, où tout vecteur est un produit vectoriel.** En d'autres termes, un vecteur de $\mathbb{R}^6$ qui ne vérifie pas la relation du **III.B** est ≪indécomposable≫.

IV.E9. Σ vérifie ($\mathcal{C}$) si, et seulement si, $\begin{cases} x_5 = -x_2 \\ x_6 = -x_3 \\ x_1x_4 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \end{cases}$

IV.E10. Cela résulte de **IV.E3.** et de l'identité $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$.

À noter que la relation ($\mathcal{C}$) obtenue en **III.B.** *évoque celle de* PLÜCKER *: une droite projective dans $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ est connue grâce à la donnée de deux points distincts, de coordonnées homogènes respectives $X = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $Y = {}^t(y_1, y_2, y_3, y_4)$. Le vecteur $X \times Y$ est alors non nul et deux tels couples (X, Y) et (X', Y') définissent la même droite si, et seulement si, $X \times Y$ et $X' \times Y'$ sont colinéaires. Comme on a montré que la relation ($\mathcal{C}$) caractérise les vecteurs de la forme $X \times Y$, une droite projective dans $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ s'identifie naturellement à un point de la quadrique projective d'équation $q(Z) = z_1z_4 + z_2z_5 + z_3z_6 = 0$ dans $\mathbb{P}_5(\mathbb{R})$. Une autre interprétation consiste à associer à une droite (MM') incluse dans $\mathbb{R}^3$ le glisseur G de résultante $\overrightarrow{MM'}$ ayant cette droite pour axe central. Les éléments de réduction en O de G sont $\mathcal{R} = \ \overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MM'}$, c'est-à-dire encore $\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{OM'}$. Si, à tout $M = {}^t(x_M, y_M, z_M)$, on associe $X_M = {}^t(1, x_M, y_M, z_M) \in \mathbb{R}^4$, alors $\mathcal{R} = X_M \times X_{M'}$ et ($\mathcal{C}$) traduit la nullité de l'invariant scalaire de G. Maintenant, q est une forme neutre, c'est-à-dire non dégénérée et de signature $(3, 3)$, et possède donc deux familles de sous-espaces vectoriels totalement singuliers de dimension 3, formant chacune une orbite de l'action naturelle de $SO(q)$ sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension 3. Avec la première interprétation, l'une d'elles, $\mathcal{O}_1$, correspond aux familles π_X de droites passant par un point donné X de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ et l'autre aux familles Δ_P de droites incluses dans un plan P de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.*