Centrale – Supélec, 2001

Mathématiques II, PC

Partie I. Étude de quelques exemples

I.A.1. a) si (x, y) sont liés, on peut supposer $y = \lambda x$ avec $\lambda \neq 0$. On complète (x) en $(x, x_2, \ldots, x_n)$ base de V. L'endomorphisme dont la matrice associée dans cette base est :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et convient.

b) si la famille (x, y) est libre, on la complète en $(x, y, \epsilon_3, \ldots, \epsilon_n)$ base de V. On définit f par $f(x) = y, f(y) = x$, et pour tout $3 \leq k \leq n, f(\epsilon_k) = \epsilon_k$. La matrice associée à f dans cette base est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

I.A.2. La propriété (P_1) n'est pas vérifiée, car une matrice de rang 1 n'est pas inversible (la dimension de V est supérieure à 2).

La propriété (P_2) est vérifiée, car I est inversible.

La propriété (P_3) est vérifiée, car I est inversible.

La propriété (P_4) n'est pas vérifiée, car GL_n n'est pas un sous-espace vectoriel (il ne contient pas le vecteur nul).

La propriété (P_5) est vérifiée, car GL_n est un groupe.

I.B.1. Si l'on note $(e_1, \ldots, e_n)$ une base, et si A est triangulaire dans cette base, il vient $Ae_n = a_{n,n}e_n$, ce qui signifie que e_n est vecteur propre associé à la valeur propre $a_{n,n}$.

On en déduit que la propriété (P_6) n'est pas vérifiée, car $\mathrm{Vect}(e_n)$ est un sous-espace de dimension 1, stable par tous les éléments de $\mathcal{L}$.

I.B.2. La propriété (P_1) est vérifiée ; par exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

La propriété (P_2) est vérifiée, car I est triangulaire.

La propriété (P_3) est vérifiée, car I est triangulaire et inversible.

La propriété (P_4) est vérifiée ; si A, B sont triangulaire inférieures et λ est un scalaire, $A + \lambda B$ est triangulaire inférieure.

La propriété (P_5) est vérifiée ; il suffit de faire le calcul...

I.C.1. Si $A \in \mathcal{L}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, par les propriétés $(P_3), (P_4)$, on a : $A - \lambda I \in \mathcal{L}$. Le rang de cette matrice ne pouvant être 1, il est égal à 2 ou 0. Comme on travaille dans $\mathbb{C}$, A admet au moins une valeur propre λ, et la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible.
Donc, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{rg}(A - \lambda I) = 0$, donc tel que $A = \lambda I$. Ainsi $\mathcal{L}$ est l'ensemble des homothéties, car l'inclusion réciproque est immédiate.

I.C.2. Si la propriété (P_1) n'est pas vérifiée, la question précédente entraîne que $\mathcal{L} = \{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$, ce qui entraîne que la propriété (P_6) n'est pas vérifiée, car tous les sous-espaces de V sont stables par une homothétie.

Partie II. Les propriétés (P_3, P_4, P_5, P_6) sont vérifiées. On montre que (P_1) l'est également

II.A. Notons $U = \{Nz_1 \mid N \in \mathcal{L}\}$. U n'est pas réduit à 0, puisque $I \in \mathcal{L}$ implique que $z_1 \in U$. Par la propriété (P_5), U est stable par $\mathcal{L}$. On en déduit par (P_6) que $U = V$.

Un calcul immédiat donne $M_0 x_1 = z_1$ et $M_1 x_1 = z_2$. La famille (z_1, z_2) étant libre, la famille (M_0, M_1) l'est également.

II.B. Soit $u \in M_0(V)$. Il existe $x \in V$ tel que $u = M_0 x$. Alors :

$$M_0 N_0 u = M_0(N_0 M_0 x) \in M_0(V)$$

La matrice $M_0 N_0$ étant dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, elle admet au moins une valeur propre $\alpha \in \mathbb{C}$ et un vecteur propre $z \neq 0$ associé.

On peut écrire $M_1 - \alpha M_0 = (M_0 N_0 - \alpha I) M_0 = L M_0$. Ainsi $\mathrm{rg}(M_1 - \alpha M_0) = \mathrm{rg}(L M_0) \leq \mathrm{rg}(M_0)$. De plus la matrice L n'étant pas inversible, il vient $\mathrm{rg}(M_1 - \alpha M_0) < \mathrm{rg}(M_0)$. En effet :

$$\mathrm{rg}(M_1 - \alpha M_0) = \mathrm{rg}(L|_{\mathrm{Im}\, M_0}) = \mathrm{rg}(M_0) - \dim \mathrm{Ker}(L \cap \mathrm{Im}\, M_0) < \mathrm{rg}(M_0)$$

Si l'on suppose $m \geq 2$, on trouve ainsi un élément non nul de de $\mathcal{L}$ de rang strictement inférieur à celui de M_0. C'est une contradiction au choix de M_0. Donc $m = 1$.

Partie III. Les propriétés (P_4, P_5) sont vérifiées. On montre que (P_3, P_6) le sont également, puis que $\mathcal{L} = E$

III.A. Notons :

$$\tilde{\mathcal{L}} = \{M \in E \mid M(W) \subset W\}$$

Il est aisé de montrer que c'est un sous-espace vectoriel de E qui contient $\mathcal{L}$, car W est stable par $\mathcal{L}$.

Soit W_1 un suppélemntaire de W dans V, soit $V = W \oplus W_1$. C'est un sous-espace de dimension $(n - k)$.
Dans une base adaptée à cette décomposition, tout élément de $\tilde{\mathcal{L}}$ sécrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ (0) & C \end{pmatrix}$$

où A est une matrice de $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{k,n-k}$ et $C \in \mathcal{M}_{n-k,k}$.
Ainsi $\tilde{\mathcal{L}}$ est de dimension $n^2 - k(n - k)$.

L'inclusion de $\mathcal{L}$ dans $\tilde{\mathcal{L}}$ donne $n^2 - 1 \leq n^2 - k(n - k) \Rightarrow k(n - k) \leq 1$. Ceci n'est possible que si $k = 0$ ou $k = n$.

III.B.1. On a :

$$n^2 \geq \dim(\mathcal{H} + \mathcal{L}) = \dim \mathcal{H} + \dim \mathcal{L} - \dim(\mathcal{H} \cap \mathcal{L}) = 2 + n^2 - 1 - \dim(\mathcal{H} \cap \mathcal{L})$$

ceci entraîne que $\dim(\mathcal{H} \cap \mathcal{L}) \geq 1$.

Soit $M \in \mathcal{H} \cap \mathcal{L}, M \neq 0$. On peut écrire $M = \alpha I + \beta E_{k,m}$, avec $\alpha \neq 0$ car autrement on aurait $E_{k,m} \in \mathcal{L}$.
Donc M est inversible.

III.B.2. Comme $E_{k,m}E_{m,k} = E_{k,k}$ par les propriétés (P_4) et (P_5), $I = \sum_k E_{k,k} \in \mathcal{L}$.

III.C. On a

$$\mathrm{card}(A, A^2, \ldots, A^{n^2+1}) = n^2 + 1 > n^2$$

La famille $(A, A^2, \ldots, A^{n^2+1})$ est donc liée. Notons

$$p + 1 = \min\{k \geq 2 \mid (A, A^2, \ldots, A^k) \text{ est liée}\}$$

Il existe des scalaires $(\lambda_0, \ldots, \lambda_p)$ non tous nuls (et $\lambda_p \neq 0$ par choix de p) tels que

$$\lambda_0 A + \lambda_1 A^2 + \ldots + \lambda_p A^{p+1} = 0$$

La matrice A étant inversible, il vient :

$$\lambda_0 I + \lambda_1 A + \ldots + \lambda_p A^p = 0$$

On a $\lambda_0 \neq 0$ car autrement on obtient un contradiction au choix de p. Comme $\lambda_0 \neq 0$, et par les propriétés (P_3, P_4), on a $I \in \mathcal{L}$.

III.D. Comme tout orthogonal C_u est un sous-espace vectoriel de V. Montrons sa stabilité par $\mathcal{L}$.
Soit $M \in \mathcal{L}$ et $v \in C_u$. Alors quel que soit $K \in \mathcal{L}$: ${}^t\overline{v}{}^t\overline{K}u = 0$ et

$${}^t(\overline{M}\overline{v}){}^t\overline{L}u = \overline{v}({}^t\overline{M}{}^t\overline{L})u = \overline{v}{}^t\overline{K}u = 0$$

B_u n'est pas réduit à 0 car ${}^t\overline{I}u = u \in B_u$.
C_u est stable par $\mathcal{L}$. Par la propriété (P_6), si $C_u = V$, alors $B_u = \{0\}$, ce qui est faux. Donc $C_u = \{0\}$ et $B_u = V$.

A_u est trivialement stable par $\mathcal{L}$ et n'est pas réduit à 0, puisque $I \in \mathcal{L}$. Donc par (P_6), $A_u = V$.

Ainsi $A_{v_0} = V$ et $B_{w_0} = V$. Donc pour tout $(x, y) \in V^2$ il existe $L, M \in \mathcal{L}$ tels que $Lv_0 = x$ et ${}^t\overline{M}w_0 = y$.
Si $A \in E$ est de rang 1, A s'écrit sous la forme

$$A = x{}^t\overline{y} = Lv_0{}^t\overline{w_0}M = LM_0M \in \mathcal{L}$$

Mais toute matrice $M \in E$ s'écrivant

$$M = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}E_{i,j}$$

est élément de $\mathcal{L}$, puisque c'est un sous-espace vectoriel et que $E_{i,j}$ est de rang 1.