MATHÉMATIQUES I

Préliminaire

On rappelle qu'une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bornée par un réel $K > 0$ si la fonction $|\varphi|$ est majorée par K :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\varphi(x)| \leq K .$$

1) Soit m un entier supérieur ou égal à 1. En calculant de deux façons différentes le développement limité à l'ordre m à l'origine de la fonction $(e^x - 1)^m$ montrer que :

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} C_m^k k^j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \text{ est un entier entre 1 et } m-1, \\ m! & \text{si } j = m. \end{cases}$$

2) Prouver que si (u_k) est une suite croissante de réels strictement positifs et k, n des entiers tels que $1 \leq k \leq n$, on a :

$$(u_1 u_2 \dots u_k)^n \leq (u_1 u_2 \dots u_n)^k .$$

Partie I -

I.A - Soit f une fonction de classe C^1 et de classe C^2 par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par M_0 et M_2.

I.A.1) En écrivant, pour $h > 0$, l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x + h$ et entre x et $x - h$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2} .$$

I.A.2) En déduire que f' est bornée par $\sqrt{2 M_0 M_2}$.

I.B -

I.B.1) Montrer de même que, si f est de classe C^2 et de classe C^3 par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que f et $f^{(3)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par M_0 et M_3, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}(9 M_0^2 M_3)^{1/3} .$$

I.B.2) f'' est-elle également bornée sur $\mathbb{R}$?

Filière PC

Dans toute la suite du problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Partie II -

Soit f une fonction, non constante, de classe C^{n-1} et de classe C^n par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par M_0 et M_n.

II.A - En utilisant la question 1) du préliminaire ainsi que l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n appliquée à la fonction f entre les valeurs x et $x+h$ pour $h = 1, 2, \ldots, n-1$, montrer que la fonction $f^{(n-1)}$ est, elle aussi, bornée sur $\mathbb{R}$.

II.B - En déduire que toutes les dérivées $f^{(k)}$ sont bornées pour $0 \leq k \leq n$. On note alors $M_k = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \left|f^{(k)}(x)\right|$.

II.C -

II.C.1) Montrer que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on a $M_k > 0$.

II.C.2) En utilisant la suite finie $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$ avec $u_k = 2^{k-1}\dfrac{M_k}{M_{k-1}}$, en déduire que pour tout entier k entre 0 et n, on a :

$$M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}.$$

Est-ce la meilleure majoration possible ?

Partie III -

E (respectivement F) désigne l'espace des fonctions continues par morceaux (respectivement continues) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x+1) + f(x) = 0$ pour tout réel x. On admettra —c'est évident— que ce sont des sous-espaces vectoriels réels de l'espace de toutes les fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ que l'on munit de la norme de la convergence uniforme, notée ici N et définie par

$$N(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

III.A - Démontrer que pour toute fonction f dans E, il existe g unique dans F telle que, en tout point x où f est continue, on a $g'(x) = f(x)$. On note alors $g = T(f)$ ou $g = Tf$ et l'on définit ainsi une application T de E dans E.

III.B - On considère la fonction φ_0 de E telle que :

$$\varphi_0(0) = 0, \qquad \varphi_0(x) = 1 \text{ si } x \in]\,0;1[\,.$$

On pose $T^1 = T$ et si $k \in \mathbb{N}^*$, $T^k = T \circ T^{k-1}$, puis pour $k \geq 1$, $\varphi_k = T^k(\varphi_0)$.

III.B.1) Déterminer et représenter graphiquement sur le segement $[0;2]$ les fonctions φ_k pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Dans toute la suite , on notera $\lambda_k = N(\varphi_k)$.

III.B.2) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_k(-x) = (-1)^{k+1}\varphi_k(x) \text{ et } \varphi_k(1-x) = (-1)^k\varphi_k(x).$$

III.B.3) Montrer que, pour $k \geq 1$,

$$\lambda_{2k} = (-1)^k\varphi_{2k}(1/2) \text{ et } \lambda_{2k-1} = (-1)^k\varphi_{2k-1}(0).$$

III.C -

III.C.1) Soit $f \in E$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt + \int_1^x f(t)\,dt.$$

III.C.2) En déduire que, pour tout $f \in E$, on a $2N(Tf) \leq N(f)$.

III.D - Déterminer les fonctions f de norme 1 de E telles que :

$$N(Tf) = \frac{1}{2}.$$

III.E - Montrer qu'il n'existe pas de fonction f de norme 1 dans F telle que :

$$N(Tf) = \frac{1}{2}.$$

III.F - Soit maintenant p un entier naturel non nul et f une fonction de classe C^{n-1} et de classe C^n par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x+2p) = f(x)$ pour tout réel x.

III.F.1)

a) Montrer que si f a q zéros distincts sur $[0;2p[$, alors f' a au moins q zéros distincts sur $[0;2p[$.

b) Montrer que si f et f' ont exactement q zéros distincts sur $[0;2p[$,alors elles n'ont aucun zéro commun.

III.F.2) Pour tout réel ν tel que $0 < \nu < 1$ et tout réel ρ, on définit la fonction $l : x \mapsto \varphi_n(x) - \nu f(x+\rho)$.

a) On suppose que $N(f^{(n)}) \leq 1$. Montrer que $l^{(n-1)}$ s'annule au plus $2p$ fois sur $[0;2p[$.

b) On suppose que $N(f) \leq \lambda_n$. Montrer que l s'annule au moins $2p$ fois sur $[0;2p[$.

c) En déduire que, si $N(f) \leq \lambda_n$ et $N(f^{(n)}) \leq 1$, les $l^{(k)}$ pour $k = 1, 2, \ldots, n-1$ ont exactement $2p$ zéros sur l'intervalle $[0;2p[$.

III.F.3) On suppose f non constante.

a) Montrer que l'on peut trouver α et β dans $[0;2p[$ tels que :

$$|f'(\alpha)| = N(f'), \qquad \varphi'_n(\beta) = \frac{\lambda_{n-1}}{N(f')} f'(\alpha).$$

On pose alors $h(x) = \varphi_n(x) - \lambda_{n-1} f(x + \alpha - \beta) / N(f')$.

b) Ici on suppose $n \geq 3$. Vérifier que $h'(\beta) = h''(\beta) = 0$.

c) En déduire que :

$$\left(N(f) \leq \lambda_n \text{ et } N(f^{(n)}) \leq 1\right) \Rightarrow \left(N(f') \leq \lambda_{n-1}\right).$$

d) Montrer que cette dernière implication est encore vraie pour $n = 2$.

III.G - Montrer qu'il existe une fonction ω de classe C^n de $\mathbb{R}$ dans $[0;1]$ valant 1 sur le segment $[-1/2;1/2]$ et 0 en dehors du segment $[-1;1]$ (on pourra utiliser la fonction $x \mapsto \int_0^x \sin^n(t)\,dt$ sur le segment $[0;\pi]$).

III.H - Soit maintenant f une fonction de classe C^{n-1} et de classe C^n par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ et pour laquelle :

$$N(f) \leq \lambda_n \text{ et } N(f^{(n)}) \leq 1.$$

Soit α un réel de l'intervalle $[0;1[$. Pour tout entier naturel p non nul, on note f_p la fonction de période $2p$ telle que :

$$f_p(x) = \alpha f(x)\omega(x/p) \text{ pour } |x| \leq p.$$

III.H.1) Montrer que $f_p^{(n)}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et que l'on a, pour p assez grand,

$$N(f_p) \leq \lambda_n \text{ et } N(f_p^{(n)}) \leq 1.$$

III.H.2) En déduire que l'on a encore $N(f') \leq \lambda_{n-1}$.

III.I - Soit f une fonction de classe C^{n-1} et de classe C^n par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout entier k compris entre 0 et n, $f^{(k)}$ est bornée et que l'on a :

$$N(f^{(k)}) \leq N(f)^{1-k/n} N(f^{(n)})^{k/n} \lambda_{n-k} / \lambda_n^{1-k/n}.$$

(On pourra utiliser une fonction du type $x \mapsto af(bx)$).

Partie IV -

IV.A - On définit, pour p entier supérieur ou égal à 2, la fonction ψ_p de F, affine sur $\left[0;\frac{1}{p}\right]$, $\left[\frac{1}{p};1-\frac{1}{p}\right]$ et $\left[1-\frac{1}{p};1\right]$ et vérifiant :

$$\psi_p(0) = \psi_p(1) = 0, \qquad \psi_p\left(\frac{1}{p}\right) = \psi_p\left(1-\frac{1}{p}\right) = 1 .$$

En utilisant le III.C, montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\lim_{p \to +\infty} N(T^n(\psi_p)) = \lambda_n .$$

IV.B - En déduire que l'inégalité du III.I ne peut être améliorée.

• • • FIN • • •