Centrale – Supélec, 2001
Mathématiques I, PC

Préliminaire:
1) D'une part $(\mathrm{e}^x-1)^m=(x+o(x))^m=x^m+o(x^m)$. D'autre part:

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^x-1)^m&=(-1)^m+\sum_{k=1}^{m}\mathrm{C}_m^k(-1)^{m-k}\mathrm{e}^{kx}\\&=(-1)^m+\sum_{k=1}^{m}\mathrm{C}_m^k(-1)^{m-k}\sum_{j=0}^{m}\frac{k^j}{j!}x^j+o(x^m)\end{aligned}.$$

Par unicité des coefficients d'un DL on obtient le résultat demandé.

2) Pour $k<n$ on a: $(u_1...u_n)^k-(u_1...u_k)^n=(u_1...u_k)^k[(u_{k+1}...u_n)^k-(u_1...u_k)^{n-k}]\geqslant 0$ car d'une part $(u_{k+1}...u_n)^k\geqslant(u_k^{n-k})^k$ et d'autre part $(u_1...u_k)^{n-k}\leqslant(u_k^k)^{n-k}$ puisque la suite (u_k) est croissante.

I.A.1) Puisque f est de classe C^1 et de classe C^2 par morceaux on peut écrire:
$|f(x+h)-f(x)-hf'(x)|\leqslant\dfrac{h^2M_2}{2}$ et $|f(x-h)-f(x)+hf'(x)|\leqslant\dfrac{h^2M_2}{2}$.
On en déduit: $|2hf'(x)|\leqslant|f(x-h)-f(x)+hf'(x)|+|-f(x+h)+f(x)+hf'(x)|+|f(x+h)|+|f(x-h)|\leqslant h^2M_2+2M_0$ d'où le résultat en divisant par $2h>0$.

I.A.2) La fonction définie par $\varphi(h)=\dfrac{M_0}{h}+\dfrac{M_2h}{2}$ a pour dérivée $\varphi'(h)=\dfrac{M_2h^2-2M_0}{2h^2}$ qui s'annule pour $h_0=\sqrt{\dfrac{2M_0}{M_2}}$. On obtient $|f'(x)|\leqslant\varphi(h_0)=\sqrt{2M_0M_2}$.

I.B.1) On applique de même l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 entre x et $x+h$ puis entre x et $x-h$:
$|f(x+h)-f(x)-hf'(x)-h^2f''(x)|\leqslant\dfrac{h^3M_3}{6}$ et $|f(x-h)-f(x)+hf'(x)-h^2f''(x)|\leqslant\dfrac{h^3M_3}{6}$.
On en déduit: $|2hf'(x)|\leqslant|f(x-h)-f(x)+hf'(x)-h^2f''(x)|+|-f(x+h)+f(x)+hf'(x)+h^2f''(x)|+|f(x+h)|+|f(x-h)|\leqslant\dfrac{h^3M_3}{3}+2M_0$ d'où $|f'(x)|\leqslant\dfrac{h^2M_3}{6}+\dfrac{M_0}{h}$.
La fonction définie par $\varphi(h)=\dfrac{M_0}{h}+\dfrac{M_3h^2}{6}$ a pour dérivée $\varphi'(h)=\dfrac{M_3h^3-3M_0}{3h^2}$ qui s'annule pour $h_0=\left(\dfrac{3M_0}{M_3}\right)^{1/3}$. On obtient $|f'(x)|\leqslant\varphi(h_0)=\dfrac{1}{2}(9M_0^2M_3)^{1/3}$.

I.B.2) f' et $f^{(3)}$ étant bornées sur $\mathbb{R}$, le I.A.2 entraine que f'' est bornée sur $\mathbb{R}$.

II.A. L'inégalité de Taylor-Lagrange s'écrit: $|f(x+h)-f(x)-\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j|\leqslant\dfrac{M_nh^n}{n!}$ d'où avec l'inégalité triangulaire: $\left|\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j\right|\leqslant\dfrac{M_nh^n}{n!}+2M_0$.
En ajoutant pour h de 1 à $n-1$ on obtient:

$$\left|\sum_{h=1}^{n-1}(-1)^h\mathrm{C}_{n-1}^h\sum_{j=1}^{n-1}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j\right|\leqslant\sum_{h=1}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^h\left(\frac{M_nh^n}{n!}+2M_0\right).$$

En permutant les sommations sur h et j et en utilisant le 1) pour $m=n-1$ on obtient:
$|f^{(n-1)}(x)|\leqslant C_1M_n+C_2M_0$ où C_1 et C_2 sont des constantes. $f^{(n-1)}$ est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

II.B. Il suffit d'appliquer le II.A. à f et $f^{(k)}$ pour k de $n-1$ à 1.

II.C.1) $M_k = 0$ entraine $f^{(k)} = 0$ d'où f est une fonction polynôme. f étant bornée, il en résulte que f est constante ce qui est exclu par hypothèse. On a donc $M_k > 0$.

II.C.2) $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} = 2\dfrac{M_{k+1}M_{k-1}}{M_k^2} \geqslant 1$ d'après la question I.A.2) appliquée à $f^{(k-1)}$. On peut donc utiliser la question 2) du préliminaire qui donne en remplaçant les u_k :

$\left(\dfrac{M_k}{M_0}2^{0+1+\ldots+(k-1)}\right)^n \leqslant \left(\dfrac{M_n}{M_0}2^{1+\ldots+(n-1)}\right)^k$ d'où $M_k^n \leqslant M_n^k M_0^{n-k} 2^{kn(n-1)/2-nk(k-1)/2}$

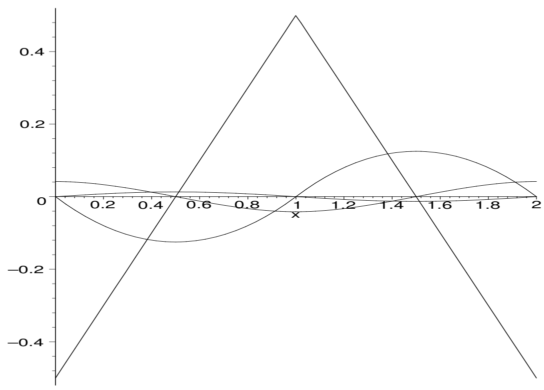
d'où enfin $M_k \leqslant M_n^{k/n} M_0^{1-k/n} 2^{k(n-k)/2}$.

Ce n'est pas la meilleure majoration pour $n = 3$ et $k = 1$ car le coefficient $\dfrac{9^{1/3}}{2} = 1,04...$ obtenu au I.B.1) est inférieur au 2 obtenu dans la formule précédente.

III.A. Soit $x \mapsto g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + a$ une primitive de f. La fonction $x \mapsto g(x+1) + g(x)$ est constante puisque sa dérivée est nulle ($f \in E$). $g \in F$ si et seulement si $g(1) + g(0) = 0$ soit $a = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

III.B.1) Il suffit de déterminer φ_k sur [0,1] : $\varphi_1(x) = x - 1/2$, $\varphi_2(x) = x^2/2 - x/2$, $\varphi_3(x) = x^3/6 - x^2/4 + 1/24$ et $\varphi_4(x) = x^4/24 - x^3/12 + x/24$. la relation $\varphi_k(x+1) = -\varphi_k(x)$ donne φ_k sur [1,2].

φ_1 et φ_3 s'annulent en $x = 1/2$ alors que φ_2 s'annule en 0 et 1; on en déduit les premières valeurs de la suite (λ_n) : $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_2 = 1/8$, $\lambda_3 = 1/24$, $\lambda_4 = 5/384$.



III.B.2) La seconde propriété est équivalente à la première car $\varphi_k \in E$ donc $\varphi_k(-x) + \varphi_k(-x+1) = 0$. Montrons la par récurrence sur k. Elle est vérifiée pour $k = 0$ car $\varphi_0(x) = -1$ sur]-1,0[et de plus les fonctions de E sont 2-périodiques.

Supposons la vérifiée pour un entier $k-1$ et soit $h(x) = \varphi_k(-x) + (-1)^k\varphi_k(x)$. $h'(x) = -\varphi_{k-1}(-x) + (-1)^k\varphi_{k-1}(x) = 0$ par hypothèse de récurrence. Il suffit donc de montrer que $h(0) = (1 + (-1)^k)\varphi_k(0)$ est nul. C'est immédiat si k est impair. Si k est pair, φ_{k-1} étant une fonction paire on calcule:

$\varphi_k(0) = T\varphi_{k-1}(0) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \varphi_{k-1}(t)\,\mathrm{d}t = -\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-1}^1 \varphi_{k-1}(t)\,\mathrm{d}t = -\dfrac{1}{4}(\varphi_k(1) - \varphi_k(-1)) = 0$ car φ_k est une primitive de φ_{k-1} et est 2-périodique. On a donc $h = 0$ ce qui achève la démonstration par récurrence.

III.B.3) Il suffit d'étudier φ_k sur $[0, 1/2]$. Avec $\varphi_{2k}(0) = 0$ et $\varphi_{2k-1}(1/2) = 0$ on montre par récurrence les tableaux de variation:

x	0		$1/2$
φ_{4k+1}		$\nearrow$	0
φ_{4k+2}	0	$\searrow$	
φ_{4k+3}		$\searrow$	0
φ_{4k+4}	0	$\nearrow$	

d'où les expressions de λ_{2k} et λ_{2k-1}.

III.C.1) Du III.A on déduit $2Tf(x) = 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ par la relation de Chasles.

III.C.2) Pour $x \in [0,1]$ on a $|2Tf(x)| \leqslant xN(f) + (1-x)N(f) = N(f)$. C'est encore vrai pour $x \in [-1,0]$ puisque $Tf(x) = -Tf(1+x)$ et donc aussi sur $\mathbb{R}$ par 2-périodicité. On a donc $2N(Tf) \leqslant N(f)$.

III.D. Soit $f \in E$ de norme 1 telle que $N(Tf) = 1/2$. Puisque Tf est continue et que $N(Tf) = \sup\limits_{x\in[0,1]} |Tf(x)|$, il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $|Tf(x_0)| = 1/2$. Quitte à changer f en $-f$ on peut supposer $Tf(x_0) = 1/2$. On en déduit $1 = 2Tf(x_0) = \int_0^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant x_0 + (1-x_0) = 1$. Il y a donc égalité dans chacune des majorations et par suite $\int_0^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = x_0$ et $\int_1^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - x_0$. On en déduit que $f(x) = 1$ sur $[0,x_0]$ et $f(x) = -1$ sur $[x_0,1]$ (sauf en un nombre fini de points où f prend une valeur quelconque entre -1 et 1). La relation $f(1+x) = -f(x)$ définit ensuite f pour $x \notin [0,1]$. Réciproquement une telle fonction f vérifie bien $f \in E$, $N(f) = 1$ et donc $N(Tf) \leqslant 1/2$ avec égalité car $Tf(x_0) = 1/2$.

III.E. Une fonction f déterminée au III.D a nécessairement une discontinuité en x_0, même si $x_0 = 0$ (car alors $f(x) = -1$ sur [0,1] et donc $f(x) = 1$ sur [-1,0]) où si $x_0 = 1$ (idem en échangeant 1 et -1). Elle ne peut donc pas appartenir à F.

III.F.1)

a) Supposons que f s'annule en $x_1, ..., x_q$ avec $0 \leqslant x_1 < x_2 < ... < x_q < 2p$. Puisque f est de classe C^1 on peut appliquer le théorème de Rolle: Pour $1 \leqslant k \leqslant q$ on a $f(x_k) = f(x_{k+1})$ donc f' a au moins un zéro y_k sur chacun des intervalles $]x_k, x_{k+1}[$ (en posant $x_{q+1} = x_1 + 2p$). Si $y_q \geqslant 2p$, $f'(y_q - 2p) = f'(y_q) = 0$ et $y_q - 2p \in [0,2p]$. f' a donc bien au moins q zéros distincts sur $[0,2p[$.

b) Si f a q zéros distincts sur $[0,2p[$, nous venons de montrer que f' a au moins q zéros distincts des zéros de f sur $[0,2p[$. Si f' a exactement q zéros distincts sur $[0,2p[$, ils sont donc distincts des zéros de f.

III.F.2)

a) l est de classe C^{n-1} et de classe C^n par morceaux puisque $\varphi_n^{(n)} = \varphi_0$. Pour x non entier on a $l^{(n)}(x) = \varepsilon - \nu f^{(n)}(x+\rho)$ avec $\varepsilon = \pm 1$ et $|\nu f^{(n)}(x+\rho)| \leqslant \nu < 1$. $l^{(n-1)}$ est donc strictement monotone sur chaque intervalle $[k,k+1]$ avec k entier et par suite s'annule au maximum $2p$ fois sur $[0,2p[$.

b) Soit x_0 un réel tel que $|\varphi_n(x_0)| = \lambda_n$; puisque $|\nu f(x_0+\rho)| \leqslant \nu\lambda_n < \lambda_n$, $l(x_0)$ a le signe de $\varphi_n(x_0)$. De $\varphi_n(x+1) = -\varphi_n(x)$ on déduit, par continuité, que l s'annule sur chaque intervalle $[x_0+k, x_0+k+1]$ (k entier) et par suite au moins $2p$ fois sur $[0,2p[$.

c) En appliquant le F1)a) à f et ses dérivées on déduit, en partant du fait que l s'annule au moins $2p$ fois sur $[0,2p[$, que $l^{(k)}$ a au moins $2p$ zéros sur $[0,2p[$ (pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$). Mais puisque $l^{(n-1)}$ s'annule au plus $2p$ fois sur cet intervalle, chacune des dérivées s'y annule exactement $2p$ fois.

III.F.3)

a) Puisque f' est continue sur $[0,2p[$ il existe $\alpha \in [0,2p[$ tel que $|f'(\alpha)| = N(f')$. Puisque $\varphi_n' = \varphi_{n-1}$ est continue sur $[0,2p[$ $(n \geqslant 2)$ et que $\varphi_{n-1}(x+1) = -\varphi_{n-1}(x)$, il existe $\beta \in [0,2p[$ tel que $\varphi_n'(\beta) = \varepsilon N(\varphi_{n-1})$ où $\varepsilon = \dfrac{f'(\alpha)}{N(f')} = \pm 1$ ($N(f') \neq 0$ car f n'est pas constante).

b) $h'(\beta) = \varphi_n'(\beta) - \lambda_{n-1} f'(\alpha)/N(f') = 0$ par définition de β. Les fonctions f' et φ_n' sont de classe C^1 $(n \geqslant 3)$ et possèdent un extremum respectivement en α et β; par suite leurs dérivées s'annulent en ces points et donc $h''(\beta) = 0$.

c) Supposons $N(f) \leqslant \lambda_n$ et $N(f^{(n)}) \leqslant 1$; si l'on avait de plus $N(f') > \lambda_{n-1}$, la fonction $l = h$ où $\nu = \dfrac{\lambda_{n-1}}{N(f')}$ vérifierait la conclusion du F2)c): h' et h'' auraient exactement $2p$ zéros distincts sur $[0,2p[$ et donc n'auraient aucun zéro commun d'après le F1)b): contradiction avec $h'(\beta) = h''(\beta) = 0$.

d) Pour $n = 2$ on a montré au I.A.2) que $N(f') \leqslant \sqrt{2N(f)N(f'')}$. Si $N(f) \leqslant \lambda_2 = 1/8$ et $N(f'') \leqslant 1$ on déduit $N(f') \leqslant 1/2 = \lambda_1$.

III.G. Soit $g(x) = \int_0^x \sin^n t \, dt$; on montre par récurrence que pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $g^{(k)}(x) = \sin^{n+1-k}(x) P(x)$ où P est un polynôme en $\sin(x)$ et $\cos(x)$. Par suite $g^{(k)}(0) = g^{(k)}(\pi) = 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$. On définit donc une fonction de classe C^n en posant:

$$\omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant 1/2 \\ \dfrac{g(2\pi(1-|x|)}{g(\pi)} & \text{si } 1/2 \leqslant |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

. De plus on a bien $0 \leqslant \omega(x) \leqslant 1$.

III.H.1) f_p est le produit de 2 fonctions de classe C^n par morceaux sur $[-p,p]$, $f_p^{(n)}$ est donc continue par morceaux sur $[-p,p]$ et donc sur $\mathbb{R}$ par $2p$-périodicité. $N(f_p) \leqslant \alpha\lambda_n \leqslant \lambda_n$ puisque $N(\omega) = 1$.

$f_p^{(n)}(x) = \alpha \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(n-k)}(x) \frac{\omega^{(k)}(x/p)}{p^k}$ d'où $N(f_p^{(n)}) \leqslant \alpha \left(1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k \frac{N(f^{(n-k)})N(\omega^{(k)})}{p^k}\right)$.

Quand p tend vers $+\infty$, le second membre tend vers $\alpha < 1$; par suite on a bien $N(f_p^{(n)}) \leqslant 1$ pour p assez grand.

III.H.2) Puisque f_p est $2p$-périodique, de classe C^{n-1} et de classe C^n par morceaux, on peut lui appliquer le résultat du IIIF3c: pour p assez grand, $N(f_p') \leqslant \lambda_{n-1}$ (c'est immédiat si f est constante). Soit x_0 tel que $N(f') = |f'(x_0)|$ et p un entier assez grand pour que $N(f_p') \leqslant \lambda_{n-1}$ et $|x_0| \leqslant p/2$. De $f_p'(x) = \alpha(f'(x)\omega(x/p) + f(x)\omega'(x/p)/p)$ on déduit puisque $\omega(x_0/p) = 1$: $f'(x_0) = \dfrac{f_p'(x_0)}{\alpha} - \dfrac{f(x_0)\omega'(x_0/p)}{p}$ d'où $N(f') \leqslant \dfrac{\lambda_{n-1}}{\alpha} + \dfrac{\lambda_n N(\omega')}{p}$. En faisant tendre p vers $+\infty$ et α vers 1 on obtient $N(f') \leqslant \lambda_{n-1}$.

III.I. Soit f de classe C^{n-1} et de classe C^n par morceaux sur $\mathbb{R}$ telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$. On peut supposer f non constante; d'après la partie II on sait que $f^{(k)}$ est bornée pour $0 \leqslant k \leqslant n$ et que $N(f^{(k)}) > 0$. Posons $g(x) = af(bx)$ et choisissons a et b pour que $N(g) = aN(f) = \lambda_n$ et $N(g^{(n)}) = ab^n N(f^{(n)}) = 1$, c'est-à-dire $a = \dfrac{\lambda_n}{N(f)}$ et $b = \left(\dfrac{N(f)}{\lambda_n N(f^{(n)})}\right)^{(1/n)}$.

On déduit de III.H que $N(g') \leqslant \lambda_{n-1}$ puis par récurrence que $N(g^{(k)}) \leqslant \lambda_{n-k}$; en effet, de $N(g^{(k)}) \leqslant \lambda_{n-k}$ et de $N(g^{(k+n-k)}) \leqslant 1$ on déduit par le III.H appliqué à $g^{(k)}$ que $N(g^{(k+1)}) \leqslant \lambda_{n-k-1}$.

On en déduit $N(f^{(k)}) \leqslant \dfrac{\lambda_{n-k}}{ab^k} = \dfrac{\lambda_{n-k} N(f)}{\lambda_n} \left(\dfrac{\lambda_n N(f^{(n)})}{N(f)}\right)^{(k/n)}$

d'où $N(f^{(k)}) \leqslant N(f)^{1-k/n} N(f^{(n)})^{(k/n)} \dfrac{\lambda_{n-k}}{\lambda_n^{1-k/n}}$.

IV.A. Utilisons l'inégalité triangulaire appliquée à N, la linéarité de l'application T (qui découle du IIIC1) et la majoration du IIIC2 : $|N(T^n(\psi_p)) - \lambda_n| = |N(T^n(\psi_p)) - N(T^n(\varphi_0))| \leqslant |N(T^n(\psi_p - \varphi_0))| \leqslant |N(T(\psi_p - \varphi_0)|/2^{n-1}$.
La fonction $h = T(\psi_p - \varphi_0)$ a pour dérivée $\psi_p - \varphi_0$ qui est négative sur [0,1]. Elle décroit donc de $h(0) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 (\psi_p - \varphi_0)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2p}$ à $h(1) = -h(0)$. On en déduit que $N(\psi_p - \varphi_0) = \dfrac{1}{2p}$ puis que $|N(T^n(\psi_p)) - \lambda_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n p}$. Il en résulte $\displaystyle\lim_{p \mapsto +\infty} N(T^n(\psi_p)) = \lambda_n$.

IV.B. On peut appliquer le résultat du III.I à la fonction $T^n(\psi_p)$ car elle est de classe C^n ($(T^n(\psi_p))^{(n)} = \psi_p$ est continue). Le rapport $\dfrac{N(f^{(k)})}{N(f)^{1-k/n} N(f^{(n)})^{k/n}} = \dfrac{N(T^{n-k}(\psi_p))}{N(T^n(\psi_p))^{1-k/n}}$ a pour limite $\dfrac{\lambda_{n-k}}{\lambda_n^{1-k/n}}$ quand p tend vers $+\infty$. Cela montre bien que l'inégalité ne peut pas être améliorée.