

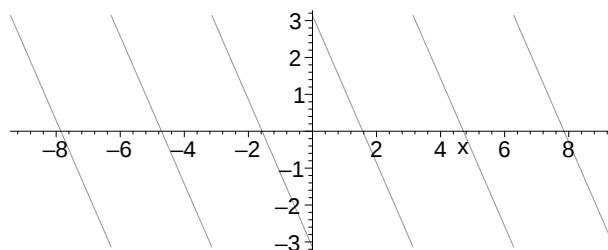
PC\*

## MATHÉMATIQUES

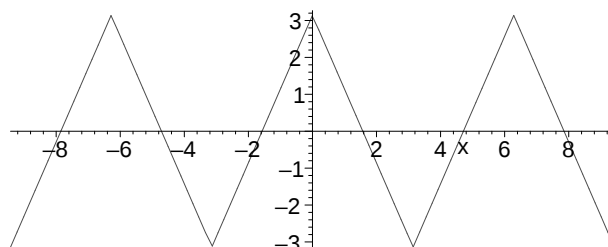
Concours Centrale–Supélec 2000, 4h.

## I.A 1

```
f:=x->Pi-2*x;
plot(f(x-Pi*floor(x/Pi)),x=-3*Pi..3*Pi,discont=true);
```



```
h:=x->piecewise(
x>=-3*Pi and x<-2*Pi, 2*x+5*Pi,
x>=-2*Pi and x<-Pi, -2*x-3*Pi,
x>=-Pi and x<0, 2*x+Pi,
x>=0 and x<Pi, -2*x+Pi,
x>=Pi and x<2*Pi, 2*x-3*Pi,
x>=2*Pi and x<3*Pi, -2*x+5*Pi) ;
plot(h(x),x=-3*Pi..3*Pi);
```



**I.A. 2** Soit  $f$  continue sur  $[0, \pi]$ . La fonction  $\hat{f}$  étant paire, elle est continue sur  $[-\pi, \pi]$ , avec  $\hat{f}(-\pi) = \hat{f}(\pi)$ . Par  $2\pi$  périodicité, la fonction  $\hat{f}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $\tilde{f}$  étant impaire, elle est continue par morceaux sur  $]-\pi, \pi[$ , avec  $\lim_{h \rightarrow -\pi^+} \tilde{f} = - \lim_{h \rightarrow \pi^-} \tilde{f}$ .

Les points éventuels de discontinuité sont donc  $\{-\pi, 0, \pi\}$ . Par  $2\pi$  périodicité, la fonction  $\tilde{f}$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ .

Une condition nécessaire et suffisante pour que  $\tilde{f}$  soit continue sur  $\mathbb{R}$  est  $f(0) = f(\pi) = 0$ . En effet :

- si  $f(0) = f(\pi) = 0$ , alors  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \tilde{f}(h) = 0 = \lim_{h \rightarrow 0^-} \tilde{f}(h)$ . Le raisonnement est identique en  $\pi$  et  $-\pi$ . On termine par  $2\pi$  périodicité.

• réciproquement, si  $\tilde{f}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , elle l'est en tout point de  $\pi\mathbb{Z}$ . Par imparité de  $\tilde{f}$ , il vient  $f(0) = f(\pi) = 0$ .

**I.B.1** Montrons d'abord l'unicité de la solution. Supposons qu'il existe  $y, z$  deux solutions du problème. Alors  $y'' = z'' = -f$  entraîne que  $y(x) = z(x) + ax + b$ . Les conditions au bord  $y(0) = z(0) = y(\pi) = z(\pi) = 0$  entraînent que  $y = z$ .

Montrons l'existence d'une solution. Posons  $F_0(t) = \int_0^t f(u)du$ . L'équation  $y'' = -f$  est équivalente à  $y'' = -F_0'$ , donc en intégrant sur  $[0, x]$  :

$$y(x) = y'(0)x - \int_0^x F_0(t)dt$$

La condition  $y(\pi) = 0$  donne :

$$y(x) = Tf(x) = \left( \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F_0(t)dt \right) x - \int_0^x F_0(t)dt$$

**I.B.2** Un calcul donne pour  $f$  de la première question :

$$Tf(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{\pi x^2}{2} + \frac{\pi^2 x}{6}$$

**II.A** La linéarité de  $T$  provient de la linéarité de l'intégrale. Pour tout  $f \in E$ ,  $Tf$  est continue sur  $[0, \pi]$ , puisque  $Tf$  y est même dérivable.

Soit  $f \in \text{Ker } T$ . En dérivant deux fois, il vient  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in [0, \pi]$ . Ainsi  $\text{Ker } T = \{0\}$ .

Montrons que :

$$\text{Im } T = F = \{g \in C^2([0, \pi]) \mid g(0) = g(\pi) = 0\}$$

- soit  $g \in F$  et  $f = -g''$ . Alors  $g'' = -f$  et  $g(0) = g(\pi) = 0$  entraînent que  $g \in \text{Im } T$ .
- soit  $g \in \text{Im } T$ . Il existe  $f \in E$  tel que  $Tf = g$ . Donc  $g'' = -f$  et  $g(0) = g(\pi) = 0$  entraînent que  $g \in F$ .

**II.B** Un calcul donne :

$$Tc_0 = \frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{2}$$

$$Tc_n = \frac{\pi \cos(nx) - \pi + (1 - (-1)^n)x}{n^2\pi}, \quad \forall n \geq 1$$

**II.C** Posons  $Tf_1(x) = C_1x - \int_0^x F_1(t)dt$  et  $Tf_2(x) = C_2x - \int_0^x F_2(t)dt$ , avec :

$$C_i = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F_i(t)dt, \quad i = 1, 2$$

En intégrant par parties, il vient :

$$\begin{aligned} (Tf_1, f_2) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi C_1 x f_2(x) dx - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left( \int_0^x F_1(t) dt \right) f_2(x) dx \\ &= \frac{2}{\pi} C_1 \left( [x F_2]_0^\pi - \int_0^\pi F_2 \right) - \frac{2}{\pi} \left( \left[ \int_0^x F_1 \cdot F_2 \right]_0^\pi - \int_0^\pi F_1 F_2 \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F_1 F_2 - \frac{2}{\pi^2} \int_0^\pi F_1 \int_0^\pi F_2 \end{aligned}$$

La symétrie de ce résultat en  $F_1, F_2$  démontre cette question.

Supposons que  $Tf_1 = \lambda f_1$  et  $Tf_2 = \mu f_2$ . Il vient :

$$\lambda(f_1, f_2) = (Tf_1, f_2) = (f_1, Tf_2) = \mu(f_1, f_2)$$

et  $\lambda \neq \mu$  entraîne que  $(f_1, f_2) = 0$ .

## II.D

- 0 n'est pas valeur propre puisque  $\text{Ker } T = \{0\}$ .
- soit  $\lambda \neq 0$  et  $f \in E$  tels que  $Tf = \lambda f$ . Comme  $\lambda$  n'est pas nul,  $f$  est deux fois dérivable et  $-f = (Tf)'' = \lambda f''$ . Ainsi  $f$  vérifie l'équation différentielle :

$$y'' + \frac{1}{\lambda}y = 0$$

★ si  $\lambda > 0$ , on pose  $\frac{1}{\lambda} = \mu^2$  et la solution générale de l'équation ci-dessus est :

$$f(x) = A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x)$$

Or  $f(0) = 0 \Rightarrow A = 0$  et les conditions  $f(\pi) = 0, f \neq 0$  entraînent que  $\mu\pi \in \pi\mathbb{Z}^*$ , donc  $\mu \in \mathbb{Z}^*$ .  
Finalement les valeurs propres positives sont  $\lambda_k = \frac{1}{k^2}, k \in \mathbb{N}$ , le sous-espace propre associé étant de dimension 1 engendré par  $x \mapsto \sin(kx)$ .

★ si  $\lambda < 0$ , on pose  $\frac{1}{\lambda} = -\mu^2$  et la solution générale de l'équation ci-dessus est :

$$f(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

Les conditions  $f(0) = 0, f(\pi) = 0$  entraînent que  $A = B = 0$ .

En conclusion les valeurs propres de  $T$  sont les  $(\lambda_k)$ .

**II.E.1** On vient de voir que la famille  $(s_n)$  est orthogonale. Un calcul immédiat donne  $(s_n, s_n) = 1$ , pour tout  $n \geq 1$ .

**II.E.2** La fonction  $\tilde{f}$  étant continue par morceaux,  $2\pi$  périodique et impaire, elle est développable en série de Fourier et ses coefficients de Fourier pairs  $a_n(\tilde{f})$  sont nuls. Par imparité  $(f, s_n) = b_n(\tilde{f})$ . Ainsi  $f_N$  représente la somme partielle de la série de Fourier associée à  $\tilde{f}$ . On a alors, toujours par imparité :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(t) - f_N(t))^2 dt = 0$$

Si  $f$  est orthogonale à la famille  $(s_n)$ , alors pour tout  $N, f_N = 0$  et  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(t) - f_N(t))^2 dt = 0 \Rightarrow \|f\|_2 = 0$ . Comme  $f$  est continue sur  $]0, \pi[$ , il vient  $f = 0$  sur  $]0, \pi[$  et par continuité sur  $[0, \pi]$ .

**II.F.1** Un calcul immédiat donne que la famille  $(c_n)$  est une famille orthonormale.

**II.F.2** La fonction  $\hat{f}$  étant continue,  $2\pi$  périodique et paire, elle est développable en série de Fourier et ses coefficients de Fourier impairs  $b_n(\hat{f})$  sont nuls. Par parité  $(f, c_n) = b_n(\hat{f})$ . Ainsi  $h_N$  représente la somme partielle de la série de Fourier associée à  $\hat{f}$ . On a alors, toujours par parité :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(t) - h_N(t))^2 dt = 0$$

Si  $f$  est orthogonale à la famille  $(c_n)$ , alors pour tout  $N$ ,  $h_N = 0$  et  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(t) - h_N(t))^2 dt = 0 \Rightarrow \|f\|_2 = 0$ . Ainsi  $f$  est identiquement nulle sur  $[0, \pi]$  (même raisonnement que précédemment).

**III.A** Écrivons la formule de Taylor à l'ordre 1 pour  $y(x) = Tf(x)$ , soit :

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \int_0^x (x-t)y''(t)dt$$

ou

$$y(x) = xy'(0) - \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

Or  $y(\pi) = 0$  entraîne que :

$$y'(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\pi-t)f(t)dt$$

et

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{x}{\pi} \int_0^\pi (\pi-t)f(t)dt - \int_0^x (x-t)f(t)dt \\ &= \int_0^x \frac{x(\pi-t)}{\pi} f(t)dt + \int_x^\pi \frac{x(\pi-t)}{\pi} f(t)dt - \int_0^x (x-t)f(t)dt \\ &= \int_0^x \frac{t(\pi-x)}{\pi} f(t)dt + \int_x^\pi \frac{x(\pi-t)}{\pi} f(t)dt \\ &= \int_0^\pi k(x,t)f(t)dt \end{aligned}$$

**III.B** Soit  $t_0$  fixé. On a :

$$k(x, t_0) = \begin{cases} \frac{t_0(\pi-x)}{\pi} & \text{si } 0 \leq t_0 \leq x \\ \frac{x_0(\pi-t_0)}{\pi} & \text{si } 0 \leq x < t_0 \leq \pi \end{cases}$$

C'est une fonction continue sur  $[0, \pi]$ , puisqu'on a la même valeur pour  $x = t_0$ .

La démonstration est identique lorsqu'on fixe  $x_0$ .

Supposons que l'on ait une autre fonction  $\ell(x, t)$  séparément continue en  $x$  et  $t$  telle que pour tout  $x \in [0, \pi]$ , pour tout  $f \in E$  :

$$Tf(x) = \int_0^\pi \ell(x, t)f(t)dt$$

Alors, pour tout  $x \in [0, \pi]$ , pour tout  $f \in E$  :

$$\int_0^\pi (k(x, t) - \ell(x, t))f(t)dt = 0$$

Fixons  $x$ . La fonction  $t \mapsto k(x, t) - \ell(x, t)$  est continue sur  $[0, \pi]$  et orthogonale à toute fonction de  $E$ , donc à elle-même. C'est la fonction identiquement nulle, et ceci est vérifié pour tout  $x \in [0, \pi]$ .

**III.C.1** Fixons  $x \in [0, \pi]$ . Une étude rapide de la fonction  $t \mapsto k(x, t)$  montre que cette fonction est positive sur  $[0, \pi]$  et qu'elle atteint son maximum en  $x$ , maximum qui vaut  $\frac{x(\pi-x)}{\pi}$ .

La fonction  $x \mapsto \frac{x(\pi-x)}{\pi}$  est également positive sur le même intervalle et atteint son maximum en  $\frac{\pi}{2}$ , ce maximum valant  $\frac{\pi}{4}$ . Ainsi

$$\sup_{(x,t) \in [0,\pi]^2} k(x, t) \geq \frac{\pi}{4}$$

Mais, si  $0 \leq t \leq x \leq \pi$ , alors :

$$0 \leq \frac{t(\pi - x)}{\pi} \leq \frac{t(\pi - t)}{\pi} \leq \frac{\pi}{4}$$

et si  $0 \leq x \leq t \leq \pi$  :

$$0 \leq \frac{x(\pi - t)}{\pi} \leq \frac{x(\pi - x)}{\pi} \leq \frac{\pi}{4}$$

Ainsi

$$\sup_{(x,t) \in [0,\pi]^2} k(x,t) = \frac{\pi}{4}$$

ce maximum étant atteint en  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**III.C.2** Pour tout  $x \in [0, \pi]$ , pour tout  $f \in E$

$$|Tf(x)| \leq \sup_{(x,t)} |k(x,t)| \int_0^\pi |f(t)| dt \leq \frac{\pi}{4} \|f\|_1$$

**III.C.3** La fonction  $f_n$  est continue sur  $[0, \pi]$  et un calcul assez rapide donne :

$$\|f_n\|_1 = \frac{\pi}{n+1}, \quad Tf_n(\pi/2) = \frac{\pi^2}{4(n+2)}$$

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Tf_n(\pi/2)}{\|f_n\|_1} = \frac{\pi}{4}$$

ce qui montre que l'inégalité ne peut être améliorée.

**III.D.1** Utilisons l'inégalité de Cauchy Schwarz.

$$\begin{aligned} |Tf(x)| &\leq \left( \int_0^\pi k^2(x,t) dt \right)^{1/2} \left( \int_0^\pi f^2(t) dt \right)^{1/2} \\ &= \left( \int_0^\pi k^2(x,t) dt \right)^{1/2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \|f\|_2 \end{aligned}$$

Un calcul donne :

$$\left( \int_0^\pi k^2(x,t) dt \right)^{1/2} = \frac{x^2(\pi - x)^2}{3\pi}$$

donc :

$$|Tf(x)| \leq \frac{x(\pi - x)}{\sqrt{3\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \|f\|_2$$

Enfin, l'étude de  $x \mapsto x(\pi - x)$  sur  $[0, \pi]$  donne le résultat demandé.

**III.D.2** Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \varphi_n\|_2 = 0$ , alors, comme

$$\|Tf - T\varphi_n\|_\infty \leq \frac{\pi^2}{4\sqrt{6}} \|f - \varphi_n\|_2$$

on a la convergence uniforme sur  $[0, \pi]$  de la suite  $T\varphi_n$  vers  $Tf$ .

**III.D.3** Prenons  $\varphi_n = f_n$  définis dans la question I.E.2. Alors, pour tout  $n \geq 1$ ,  $Ts_n = \frac{1}{n^2}s_n$  et par la question I.E.2,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_2 = 0$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tf - Tf_n\|_\infty = 0$ , et

$$Tf_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} (f, s_k) s_k$$

La série  $\sum \frac{\sin(nx) \sin(nt)}{n^2}$  est normalement convergente sur  $[0, \pi]$ . On peut donc écrire :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx) \sin(nt)}{n^2} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \left( \int_0^\pi \sin(nt) f(t) dt \right) \sin(nx) = Tf(x)$$

De plus la fonction  $(x, t) \mapsto \sum \frac{\sin(nx) \sin(nt)}{n^2}$  est continue séparément en  $x$  et  $t$ . On termine par unicité de la fonction  $k(x, t)$ .

**III.D.4** La série  $\sum \frac{1}{n^2} (f, s_n) s_n$  est normalement convergente sur  $\mathbb{R}$ , puisque  $\left| \frac{1}{n^2} (f, s_n) s_n \right| \leq \|f\|_2 \frac{1}{n^2}$ . En utilisant l'orthonormalité de la famille  $(s_n)$ , calculons :

$$\|Tf\|_2^2 = (Tf, Tf) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} |(f, s_n)|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |(f, s_n)|^2$$

Or par la question I.E.2 :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} | \|f\|_2 - \|f_N\|_2 | \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\|_2 = 0$$

avec :

$$\|f_N\|_2^2 = \sum_{n=1}^N |(f, s_n)|^2$$

ce qui signifie que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, s_n)|^2 = \|f\|_2^2$$

La seule inégalité utilisée est  $\frac{1}{n^4} \leq 1, (n \geq 1)$ . On a donc égalité  $\|Tf\|_2 = \|f\|_2$  si et seulement si  $(f, s_n) = 0, \forall n \geq 2$ , et  $f \in \text{Vect}(s_1)$ .

**III.E.1** La question II.F montre que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - h_N\|_2 = 0$ . Ceci entraîne que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \|Tf - Th_N\|_\infty = 0$ . Or :

$$Th_N = \frac{1}{2} (f, c_0) Tc_0 + \sum_{n=1}^N (f, c_n) Tc_n$$

donc, pour tout  $x \in [0, \pi]$ , pour tout  $f \in E$  :

$$Tf(x) = \frac{1}{2} (f, c_0) \left( \frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} (f, c_n) \left( \frac{\pi \cos(nx) - \pi + (1 - (-1)^n)x}{n^2 \pi} \right)$$

**III.E.2** En écrivant  $k(x, t) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n(x) c_n(t)$  et en supposant que cette série converge uniformément sur  $[0, \pi]$ , il vient :

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} Tc_0, \quad \alpha_n = Tc_n, \forall n \geq 1$$

Il reste à vérifier que la série

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\pi \cos(nx) - \pi + (1 - (-1)^n)x}{n^2 \pi} \right) \cos(nt)$$

est continue en  $x$  et en  $t$  et (même) normalement convergente sur  $[0, \pi]^2$ .

**IV.A.1** On a :

$$\left| \frac{1}{p^{2n}} (f, s_p) s_p \right| \leq \frac{1}{p^{2n}} \|f\|_2$$

ce qui montre la convergence normale de la série sur  $[0, \pi]$ , puisque  $n \geq 1$ .

**IV.A.2** Effectuons une démonstration par récurrence sur  $n$ .

- pour  $n = 1$ , c'est ce qui a été démontré précédemment.
- supposons la relation vérifiée pour  $n > 1$ . Alors, pour tout  $f \in E$  et par convergence normale :

$$T^{n+1}f = T(T^n)f = T(T_n f) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2n}} (f, s_p) T s_p = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2n+2}} (f, s_p) s_p$$

**IV.B** On sait que pour tout  $k \geq 1$ ,  $\frac{1}{k^2}$  est valeur propre de  $T$  associée au vecteur propre  $s_k$ .

Comme  $T_n = T^n$ , pour tout  $k \geq 1$ ,  $\frac{1}{k^{2n}}$  est valeur propre de  $T_n$  associée au vecteur propre  $s_k$ . Montrons que  $T_n$  n'admet pas d'autres valeurs propres. Supposons que  $\lambda$  soit valeur propre de  $T_n$  associée au vecteur propre  $f$ .

Comme  $T$  est un opérateur auto-adjoint,  $T_n = T^n$  l'est également, et  $f$  est orthogonale à  $\text{Vect}(s_k)$ . La question II.E.2 montre que  $f$  est identiquement nulle.

**IV.C.1** On a :

$$T_n f = (f, s_1) s_1 + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p^{2n}} (f, s_p) s_p$$

la convergence de la série étant normale sur  $[0, \pi]$ .

Or  $|(f, s_p) s_p| \leq \|f\|_2$  et :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p^{2n}} (f, s_p) s_p \right| &\leq \|f\|_2 \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p^{2n}} \leq \|f\|_2 \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{2n}} \\ &= \|f\|_2 \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}} \end{aligned}$$

cette quantité tendant vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n f = (f, s_1) s_1$$

**IV.C.2** Un calcul donne pour  $f$  définie dans la question I.A.1 :

$$\int_0^{\pi} (\pi - 2t) \sin(t) dt = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n f = 0$$