CONCOURS
COMMUN
INP

**ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC**

---

# MATHÉMATIQUES

**Lundi 29 avril : 14 h - 18 h**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

---

**Les calculatrices sont autorisées**

**Le sujet est composé de trois exercices indépendants.**

# EXERCICE 1
## Polynôme de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

## Partie I - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

### I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P \mid Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t.$$

**Q1.** Justifier que l'intégrale définissant $(P \mid Q)$ est convergente.

**Q2.** Montrer que l'application $(\cdot \mid \cdot) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

### I.2 - Calcul d'un produit scalaire

**Q3.** Soit $k \in [\![1, n]\!]$. À l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t}\mathrm{d}t.$$

**Q4.** Conclure que $(X^k \mid 1) = k!$ pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$.

## Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application $\alpha$ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'.$$

### II.1 - Propriétés de l'application $\alpha$

**Q5.** Montrer que $\alpha$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

**Q6.** Écrire la matrice de $\alpha$ dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$.

**Q7.** En déduire que $\alpha$ est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(\alpha) = \{-k \mid k \in [\![0, n]\!]\}$.

### II.2 - Vecteurs propres de l'application $\alpha$

On fixe un entier $k \in [\![0, n]\!]$.

**Q8.** Quelle est la dimension de $\ker(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ ?

**Q9.** En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -\,kP_k$.

**Q10.** Justifier que $P_k$ est de degré $k$.

**Q11.** Déterminer $P_0$ et $P_1$. Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

### II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \ldots, P_n)$

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

**Q12.** Montrer que $(\alpha(P) \mid Q) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\mathrm{d}t$.

**Q13.** En déduire que $(\alpha(P) \mid Q) = (P \mid \alpha(Q))$.

**Q14.** Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On pourra utiliser **Q9** et **Q13**.

## Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

On admet que le polynôme $P_n$ admet $n$ racines réelles **distinctes** que l'on note $x_1, \ldots, x_n$.

On souhaite montrer qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i). \qquad (*)$$

**Q15.** Montrer qu'un $n$-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

**Q16.** En déduire qu'il existe un unique $n$-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $(*)$.

**Q17.** Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t \neq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i).$$

# EXERCICE 2
## Étude d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 2x^3. \qquad (E)$$

## Partie I - Solution particulière de l'équation homogène

Dans cette première partie, on souhaite déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène associée à $(E)$ :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0. \qquad (H)$$

On fixe une suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence $r > 0$. On définit la fonction $f : ]-r, r[ \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in ]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

**Q18.** Justifier que la fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ et que les fonctions $f'$ et $f''$ sont développables en série entière. Exprimer avec la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les développements en série entière respectifs des fonctions $f'$ et $f''$ en précisant leur rayon de convergence.

**Q19.** Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n\geq 2}$ de nombres réels non nuls telle que pour tout $x \in ]-r, r[$, on a :

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n.$$

**Q20.** Montrer que $f$ est solution de $(H)$ sur l'intervalle $]-r, r[$ si et seulement si $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**Q21.** En déduire que si $f$ est solution de $(H)$ sur $]-r, r[$, alors $r \geq 1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}.$$

**Q22.** Réciproquement, montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction

$$g : ]-1, 1[ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\lambda x}{(1-x)}$$

est une solution de $(H)$ sur $]-1, 1[$ développable en série entière.

## Partie II - Solutions de ($E$) sur $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$

On désigne par $I$ l'un des intervalles $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$. Soit $y : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On définit la fonction $z : I \to \mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall x \in I, \quad z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) y(x).$$

**Q23.** Justifier que $z$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle $I$, puis exprimer $z'$ et $z''$ avec $y$, $y'$ et $y''$.

**Q24.** Montrer que $y$ est solution de ($E$) sur $I$ si et seulement si $z$ est solution sur $I$ de l'équation différentielle :

$$xz'' + z' = 2x. \qquad (E_1)$$

**Q25.** Montrer que si $z$ est solution de $(E_1)$ sur $I$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x.$$

**Q26.** En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle ($E$) sur $I$.

## Partie III - Solutions de ($E$) sur $]0, +\infty[$

**Q27.** Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle ($E$) sur $]0, +\infty[$.

# EXERCICE 3
## Étude d'une marche aléatoire

On considère trois points distincts du plan nommés $A$, $B$ et $C$. Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.

À l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point $A$. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

1. le mouvement du pion de l'étape $n$ à l'étape $n + 1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape $n$, plus précisément il ne dépend pas des positions occupées aux autres étapes précédentes ;
2. pour passer de l'étape $n$ à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n$ l'évènement "le pion se trouve en $A$ à l'étape $n$", $B_n$ l'évènement "le pion se trouve en $B$ à l'étape $n$" et $C_n$ l'évènement "le pion se trouve en $C$ à l'étape $n$". On note également :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P(A_n), \quad q_n = P(B_n), \quad r_n = P(C_n) \quad \text{et} \quad V_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix},$$

et on considère la matrice :

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans le démontrer** le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n}\begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que si $E$ et $F$ sont deux évènements avec $P(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de $E$ sachant $F$ (notée $P(E \mid F)$ ou $P_F(E)$) par :

$$P(E \mid F) = P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

## Partie I - Calcul des probabilités

**Q28.** Calculer les nombres $p_n, q_n$ et $r_n$ pour $n = 0$ et $n = 1$.

**Q29.** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation $V_{n+1} = MV_n$.

**Q30.** En déduire que $V_n = M^n V_0$, puis une expression de $p_n$, $q_n$ et $r_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Q31.** Déterminer les limites respectives des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interpréter le résultat.

## Partie II - Nombre moyen de passages en *A*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n$ le nombre moyen de passages du pion en $A$ entre l'étape 1 et l'étape $n$ et on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad A_n \text{ est réalisé,} \\ 0 & \text{si} \quad \overline{A_n} \text{ est réalisé.} \end{cases}$$

**Q32.** Interpréter la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ et le nombre $\mathrm{E}(X_1 + \cdots + X_n)$.

**Q33.** Calculer l'espérance de la variable aléatoire $X_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

**Q34.** En déduire une expression de $a_n$.

## Partie III - Temps d'attente avant le premier passage en *B*

On définit la variable aléatoire $T_B$ de la façon suivante :

1. si le pion ne passe jamais en $B$, on pose $T_B = 0$ ;
2. sinon, $T_B$ est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en $B$.

Nous allons déterminer la loi de $T_B$ et son espérance.

**Q35.** Calculer $P(T_B = 1)$ et $P(T_B = 2)$.

**Q36.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\overline{B_n}$ en fonction de $A_n$ et $C_n$.

**Q37.** Établir que $P(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}) = \dfrac{1}{4} P(\overline{B_2} \cap \overline{B_1})$, puis en déduire que $P(B_3 \mid \overline{B_2} \cap \overline{B_1}) = \dfrac{1}{4}$.

Dans la suite, on admet la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P\left(B_{n+1} \,\middle|\, \bigcap_{k=1}^{n} \overline{B_k}\right) = \frac{1}{4}.$$

**Q38.** Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(T_B = k)$. Que vaut $P(T_B = 0)$ ?

**Q39.** Justifier que la variable aléatoire $T_B$ admet une espérance. Quelle est l'espérance de $T_B$ ?

# FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 19 1150 – D'après documents fournis