Corrigé de CCP PC 2019 (unique)

EXERCICE I
Polynômes de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss

Partie I - Produit scalaire dans $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

Q1. Soit $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et f la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)\exp(-t)$.
Par produit, f est continue sur $[0;+\infty[$.

PQ est un polynôme que l'on peut écrire sous la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$.

On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $t^2 f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k t^{2+k} e^{-t}$.

Pour tout k, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{2+k}e^{-t} = 0$ donc, par somme, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 f(t) = 0$ et $f(t) = o(1/t^2)$. $2 > 1$ donc $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$. f l'est donc aussi.
On en conclut que f est intégrable sur $[0;+\infty[$ et donc l'intégrale définissant $(P|Q)$ est convergente.

Q2. Soit $\varphi : (P,Q) \mapsto (P|Q)$.
- La question précédente prouve que φ est définie sur $(\mathbb{R}_n[X])^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Pour $(P_1,P_2,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité d'intégrales généralisées convergentes, $\varphi(P_1 + \lambda P_2, Q) = \varphi(P_1,Q) + \lambda\varphi(P_2,Q)$: φ est linéaire à gauche.
- Par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, pour tout $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, $\varphi(P,Q) = \varphi(Q,P)$: φ est symétrique ; étant linéaire à gauche, elle est bilinéaire et symétrique.
- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $\varphi(P,P) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t} dt$.

  Pour tout $t \in [0;+\infty[$, $P(t)^2 e^{-t} \geq 0$ donc, par positivité de l'intégrale, $\varphi(P,P) \geq 0$: φ est positive.

  On suppose $\varphi(P,P) = 0$; alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t} dt = 0$.

  Comme $t \mapsto P(t)^2 e^{-t}$ est continue et positive, d'après le théorème de nullité de l'intégrale, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $P(t)^2 e^{-t} = 0$ et $P(t) = 0$. Le polynôme P a une infinité de racines, donc est nul. Par conséquent φ est définie.
- **Conclusion :** φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X)$.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

Q3. On pose, pour $t \in \mathbb{R}^+$, $u(t) = t^k$, $v(t) = -e^{-t}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, pour $t \geq 0$, $u'(t) = kt^{k-1}$, $v'(t) = e^{-t}$. De plus, par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ donc, par intégration par parties, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt$ c'est-à-dire,

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k\int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}dt$$

Q4. Pour $k \in \mathbb{N}$, $(X^k|1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(k)$: "$(X^k|1) = k!$".

Pour $k = 0$, $(X^k|1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1 = 0!$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie.
D'après la question précédente, $(X^{k+1}|1) = (k+1)(X^k|1)$ donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $(X^{k+1}|1) = (k+1)k! = (k+1)!$: $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
On peut alors conclure par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire, $(X^k|1) = k!$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

Propriétés de l'application α

Q5. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg P \leq n$ donc $\deg P' \leq n-1$, $\deg P'' \leq n-2$; ainsi $\alpha(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n.
De plus, par linéarité de la dérivation, α est linéaire donc α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q6. $\alpha(1) = 0$, $\alpha(X) = 1 - X$ et, pour $k \geq 2$, $\alpha(X^k) = k(k-1)X^{k-1} + kX^{k-1} - kX^k = -kX^k + k^2X^{k-1}$.
La matrice de α dans la base $(1, X, \cdots, X^n)$ est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n \end{pmatrix}$$

Q7. Cette matrice est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux à savoir $0,\ -1,\ -2, \cdots, -n$. α possède donc $n+1$ valeurs propres distinctes et $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$ donc α est diagonalisable.
Finalement, α est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(\alpha) = \{-k;\ k \in [\![0; n]\!]\}$.

Q8. D'après la question précédente, le polynôme caractéristique de α est scindé à racines simples donc les sous espaces propres de α sont de dimension 1 : $\dim \ker(\alpha + k id_{\mathbb{R}_n[X]}) = 1$.

Q9. Soit Q_k un vecteur (non nul) engendrant $\ker(\alpha + k id_{\mathbb{R}_n[X]})$ et c_k son coefficient dominant.
c_k est non nul et $P_k = \dfrac{1}{c_k} Q_k$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1 vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
Si R_k est un polynôme vérifiant ces propriétés, en particulier, $R_k \in \ker(\alpha + k id_{\mathbb{R}_n[X]})$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $R_k = aQ_k$. Le coefficient dominant de R_k est 1 donc $a = \dfrac{1}{c_k}$ et $R_k = P_k$.
Par conséquent, il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1 et vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

Q10. Soit d le degré de P_k
Si k est non nul, on peut identifier les coefficients de degré k pour obtenir $-d = -k$ donc $d = k$.
Pour $k = 0$: $\alpha(1) = 0$ et 1 est un polynôme de coefficient dominant 1 tel que $\alpha(1) = -0 \times 1$ donc, par unicité, $P_0 = 1$, de degré 0.

Q11. On vient de voir que $P_0 = 1$.
Soit $P = X + a$ un polynôme de degré 1 et de coefficient dominant 1.
$\alpha(P) = 1 - X$ donc $\alpha(P) = -P$ si et seulement si $a = -1$. Ainsi $P_1 = X - 1$.
De même, on pose $P = X^2 + bX + c$. $P' = 2X + b$, $P'' = 2$ et $\alpha(P) = 2X + (1-X)(2X+b) = -2X^2 + (4-b)X + b$ donc $\alpha(P) = -2P$ si et seulement si $4 - b = -2b$ et $b = -2c$ d'où $b = -4$ et $c = 2$.
Par conséquent, $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \cdots, P_n)$

Q12. Par définition, $(\alpha(P)|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (tP''(t) + (1-t)P'(t))Q(t)e^{-t}dt.$

on pose $u(t) = tP'(t)e^{-t}$. u et Q sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, $u'(t) = e^{-t}(tP''(t) + P'(t) - tP'(t))$; par croissance comparée, $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)Q(t) = 0$ donc, par intégration par parties,

$(\alpha(P)|Q) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt.$

Q13. En procédant de même mais en partant de $(P|\alpha(Q))$ et en échangeant les rôles de P et Q, on obtient $(\alpha(P)|Q) = (P|\alpha(Q))$.

Q14. Soit k et l deux entiers distincts de $\mathbb{R}_n[X]$.
D'après $Q13$, $(\alpha(P_k)|P_l) = (P_k|\alpha(P_l))$ et, d'après $Q9$, $-k(P_k|P_l) = -l(P_k|P_l)$; or $k \neq l$ donc $(P_k|P_l) = 0$
Conclusion : $(P_0, \cdots, P_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$; elle ne comporte pas le vecteur nul donc elle est libre et elle contient $n+1$ vecteurs donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

Q15. Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.
Sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on considère les applications $\varphi : P \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt$ et $\psi : P \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i)$.
φ et ψ sont des applications linéaires sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc elles sont égales si et seulement si elles coincident sur tous les vecteurs de la base $(1, X, \cdots, X^{n-1})$.
Pour $i \leq n-1$, $\varphi(X^i) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^i e^{-t}dt = i!$ et $\psi(X^i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^i$.
Pour tout $i \in [\![0; n-1]\!]$, $\varphi(X^i) = \psi(X^i)$ équivaut donc au système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}$$

Q16. La matrice $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est la matrice de Vandermonde associée aux réels $x_1, x_2, \cdots, x_n$ qui sont deux à deux distincts donc le déterminant de V est non nul. V est donc inversible et le système précédent admet une unique solution : il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant la relation $(*)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Q17. Soit $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - x_i)^2$.
$P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ et, pour tout i, $P(x_i) = 0$ donc $\psi(P) = 0$.
Par contre, $t \mapsto P(t)e^{-t}$ est continue positive et non identiquement nulle sur $[0; +\infty[$ donc $\varphi(P) > 0$.
Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt \neq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i)$$

EXERCICE 2
Etude d'une équation différentielle

Partie I - Solution particulière de l'équation homogène

Q18. f est la somme d'une série entière de rayon $r > 0$ donc f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r;r[$ et on peut dériver terme à terme à tout ordre ; en particulier, elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-r;r[$ et, pour $x \in]-r;r[$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

Par propriété des séries entières, ces deux séries sont aussi de rayon r.

Q19. On a donc, pour $x \in]-r;r[$, $x^2 f''(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n$

$x^3 f''(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2) a_{n-1} x^n$

$x f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n$

$x^2 f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n$

$f(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n.$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(n(n-1)a_n - (n-1)(n-2)a_{n-1} - n a_n \\
&\qquad -(n-1)a_{n-1} + a_n\big) x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big((n^2-2n+1)a_n - (n^2-3n+2+n-1)a_{n-1}\big) x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)^2 (a_n - a_{n-1}) x^n
\end{aligned}$$

Pour $n = 1$, $(n-1)^2 = 0$ donc, si on pose, pour $n \geq 2$, $b_n = (n-1)^2$, on a

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n (a_n - a_{n-1}) x^n$$

Q20. La somme d'une série entière est nulle sur $]-r;r[$ $(r > 0)$ si et seulement si tous ses coefficients sont nuls (unicité d'un développement en série entière) donc, d'après la question précédente, f est solution de (H) si et seulement si $a_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 2$, $b_n(a_n - a_{n-1}) = 0$. Mais, pour $n \geq 2$, $b_n \neq 0$ donc $a_n - a_{n-1} = 0$.
En passant de n à $n+1$ on a finalement : f est solution de (H) sur $]-r;r[$ si et seulement si $a_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = a_n$.

Q21. On suppose que f est solution de (H) sur $]-r;r[$. Alors, $a_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $a_n = a_1$.
La série géométrique $\sum x^n$ est de rayon 1 donc $r \geq 1$ ($r = +\infty$ si $a_1 = 0$) et, en posant $\lambda = a_1$, pour $x \in]-1;1[$, $f(x) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$.
Il s'agit de la somme d'une série géométrique de raison $x \in]-1;1[$ et de premier terme x donc, pour $x \in]-1;1[$,

$$f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}$$

Q22. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et g la fonction $x \mapsto \dfrac{\lambda x}{1-x}$.
Alors, d'après le calcul précédent, pour $x \in]-1;1[$, $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x^n$: g est la somme d'une série entière de rayon $1 > 0$. De plus, pour $x \in]-1;1[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $a_n = \lambda$; par conséquent, pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n$.
On peut donc utiliser la question $Q20$ (qui est une équivalence) pour conclure que g est une solution de (H) sur $]-1;1[$, développable en série entière.

Partie II - Solutions de (E) sur $]0;1[$ ou $]1;+\infty[$

Q23. Par produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et, pour $x \in I$,
$z'(x) = \left(\dfrac{1}{x} - 1\right) y'(x) - \dfrac{1}{x^2} y(x)$ et $z''(x) = \left(\dfrac{1}{x} - 1\right) y''(x) - \dfrac{2}{x^2} y'(x) + \dfrac{2}{x^3} y(x)$.

Q24. Pour $x \in I$,

$$\begin{aligned} xz''(x) + z'(x) &= (1-x)y''(x) - \frac{2}{x}y'(x) + \frac{2}{x^2}y(x) + (1/x - 1)y'(x) - \frac{1}{x^2}y(x) \\ &= \frac{1}{x^2}\left(x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x)\right) \end{aligned}$$

donc y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur I de l'équation

$$xz'' + z' = 2x$$

Q25. z est solution de (E_1) sur I si et seulement si z' est solution sur (I) de l'équation
$(E_2) :\ xZ' + Z = 2x$.
L'équation homogène associée à (E_2) est $(H_2) :\ xZ' + Z = 0$, équivalente à $Z' + \dfrac{1}{x}Z = 0$ (x ne s'annule pas sur I). $a : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur I ; une primitive de a est $x \mapsto \ln(x)$ donc les solutions de (H_2) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-\ln(x)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $x \mapsto \dfrac{\lambda}{x}$.
$x \mapsto x$ est solution particulière de (E_2) donc les solutions de (E_2) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{\lambda}{x} + x$.
Finalement, z est solution de (E_1) sur I si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, $z'(x) = \dfrac{\lambda}{x} + x$.

Q26. Ceci équivaut à l'existence de $\mu \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, $z(x) = \lambda \ln(x) + \dfrac{x^2}{2} + \mu$.
De plus, pour $x \in I$, $\dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x} \neq 0$ donc y est solution de (E) sur I si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $x \in I$, $y(x) = \dfrac{x}{1-x}\left(\lambda \ln(x) + \dfrac{x^2}{2} + \mu\right)$.

Les solutions de (E) sur I sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{\lambda x}{1-x}\ln(x) + \frac{\mu x}{1-x} + \frac{x^3}{2(1-x)}$$

lorsque (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^2$.

Q27. Soit f une solution de (E) sur $]0;+\infty[$. Alors f est solution sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$. D'après la question précédente il existe des constantes réelles $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ telles que

$$\forall x \in]0;1[,\ f(x) = \frac{\lambda_1 x\ln(x)}{1-x} + \frac{2\mu_1 x + x^3}{2(1-x)}$$

$$\forall x \in]1;+\infty[,\ f(x) = \frac{\lambda_2 x\ln(x)}{1-x} + \frac{2\mu_2 x + x^3}{2(1-x)}$$

f doit être continue en 1 donc doit avoir une limite finie en 1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x)}{1-x} = -1$ (limite usuelle) donc on doit avoir $2\mu_1 + 1 = 2\mu_2 + 1 = 0$: $\mu_1 = \mu_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Pour $x \in]0;1[$, $f(x) = \dfrac{\lambda_1 x\ln(x)}{1-x} + \dfrac{-x+x^3}{2(1-x)} = \dfrac{\lambda_1 x\ln(x)}{1-x} - \dfrac{x(1+x)}{2}$

Pour obtenir le nombre dérivée de f à gauche à 1, on cherche le $DL_1(1)$ de f :

Pour h au voisinage de 0, $\ln(1+h) = h - \dfrac{1}{2}h^2 + o(h^2)$ donc

$$f(1+h) = -\lambda_1\frac{(1+h)(h-h^2/2+o(h^2)}{h} - \frac{(1+h)(2+h)}{2}$$

et, après simplification,

$$f(1+h) = -\lambda_1 - 1 - \left(-\frac{\lambda_1}{2} - \frac{3}{2}\right)h + o(h)$$

On en déduit que $f'_g(1) = -\dfrac{\lambda_1}{2} - \dfrac{3}{2}$.

De même, $f'_d(1) = -\dfrac{\lambda_2}{2} - \dfrac{3}{2}$

f est dérivable donc $\lambda_1 = \lambda_2$.

Par conséquent, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) = \dfrac{\lambda_1 x\ln(x)}{1-x} - \dfrac{x(1+x)}{2}$ et $f(1) = -\lambda_1 - 1$.

Pour la réciproque, il suffit que montrer qu'une telle fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$f(1+h) = -\lambda_1(1+h)\dfrac{\ln(1+h)}{h} - \dfrac{(1+h)(2+h)}{2}$.

$h \mapsto \dfrac{\ln(1+h)}{h}$ est prolongeable en une fonction développable en série entière de rayon 1 donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On peut alors conclure que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont les fonctions f définies par $f(1) = -\lambda_1 - \dfrac{1}{2}$ et, pour $x \neq 1$, $f(x) = \dfrac{\lambda_1 x\ln(x)}{1-x} - \dfrac{x(1+x)}{2}$ avec λ_1 réel quelconque.

EXERCICE 3
Etude d'une marche aléatoire

Partie I - Calcul des probabilités

Q28. A l'instant 0, le pion est en A donc $p_0 = 1$ et $q_0 = r_0 = 0$.

A l'instant 1, la probabilité qu'il reste en A est $\dfrac{1}{2}$ donc $p_1 = \dfrac{1}{2}$. Sinon, il se déplace de manière équiprobable sur l'un des deux autres points donc $q_1 = r_1 = \dfrac{1}{4}$.

Q29. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$, on a bien $V_1 = MV_0$.
On suppose maintenant $n \in \mathbb{N}^*$.
$\{A_n, B_n, C_n\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1})$$

$P_{A_n}(A_{n+1})$ est la probabilité de rester en A de l'instant n à l'instant $n+1$ donc $\dfrac{1}{2}$.
$P_{B_n}(A_{n+1})$ est la probabilité de passer de B à A donc $\dfrac{1}{4}$. De même, $P_{C_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$.
Par conséquent, $P(A_{n+1}) = \dfrac{1}{2}P(A_n) + \dfrac{1}{4}P(B_n) + \dfrac{1}{4}P(C_n)$.
On raisonne de même pour exprimer b_{n+1} et c_{n+1} et on conclut que $V_{n+1} = MV_n$.

Q30. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: "$V_n = M^n V_0$".
$M^0 = I_3$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.
D'après la question précédente, $V_{n+1} = MV_n$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, $V_n = M^n V_0$ donc $V_{n+1} = MM^n V_0 = M^{n+1} V_0$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par récurrence, on peut alors conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = M^n V_0$.
$V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc, en utilisant le résultat admis sur M^n :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \frac{4^n + 2}{3 \cdot 4^n},\ q_n = r_n = \frac{4^n - 1}{3 \cdot 4^n}$$

Q31. Quand n tend vers l'infini, $4^n + 2 \sim 4^n$ et $4^n - 1 \sim 4^n$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \lim\limits_{n \to +\infty} q_n = \lim\limits_{n \to +\infty} r_n = \dfrac{1}{3}$.
Cela signifie que, si on observe la position du pion après un grand nombre d'étapes, il y a autant de chances qu'il soit en A, en B ou en C.

Partie II - Nombre moyen de passages en A.

Q32. $X_1 + \cdots + X_n$ est le nombre de passages par le point A lors des n premières étapes et $E(X_1 + \cdots + X_n)$ est le nombre moyen de passages par A lors des n premières étapes.

Q33. X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = P(A_n) = \dfrac{4^n + 2}{3 \cdot 4^n}$ donc $E(X_n) = \dfrac{4^n + 2}{3 \cdot 4^n}$.

Q34. $a_n = E(X_1 + \cdots + X_n)$ donc, par linéarité de l'espérance, $a_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ et, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^i \right) \\ &= \frac{n}{3} + \frac{2}{3} \frac{1}{4} \frac{1 - \dfrac{1}{4^n}}{1 - \dfrac{1}{4}} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$a_n = \frac{n}{3} + \frac{2}{9} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right)$$

Partie III - Temps d'attente avant le premier passage en B

Q35. Comme le pion est en A à l'instant 0, $(T_B = 1) = B_1$ d'où $P(T_B = 1) = \dfrac{1}{4}$.

$$\begin{aligned}(T_B = 2) &= \overline{B_1} \cap B_2 \\ &= (A_1 \cap B_2) \cup (C_1 \cap B_2)\end{aligned}$$

Ces deux événements sont incompatibles donc $P(T_B = 1) = P(A_1 \cap B_2) + P(C_1 \cap B_2)$.
Par définition d'une probabilité conditionnelle, $P(A_1 \cap B_2) = P(A_1)P_{A_1}(B_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$.
De même $P(C_1 \cap B_2) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{16}$.
Finalement, $P(T_B = 2) = \dfrac{3}{16}$.

Q36. A l'instant n, le pion est en A, en B ou en C donc $\overline{B_n} = A_n \cup C_n$.

Q37. $\overline{B_1} \cap \overline{B_2} = (A_1 \cup C_1) \cap (A_2 \cup C_2) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap A_2) \cup (C_1 \cap C_2)$.
En prenant l'intersection avec B_3 on obtient 4 événements deux à deux incompatibles donc $P(B_3 \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2} = P(B_3 \cap A_1 \cap A_2) + P(B_3 \cap A_1 \cap C_2) + P(B_3 \cap C_1 \cap A_2) + P(B_3 \cap C_1 \cap C_2)$.
$P(B_3 \cap A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_2)P_{A_1 \cap A_2}(B_3) = P(A_1 \cap A_2)P_{A_2}(B_3)$ car la position à l'instant 3 ne dépend que la position à l'instant 2. Ainsi $P(B_3 \cap A_1 \cap A_2) = \dfrac{1}{4}P(A_1 \cap A_2)$.
On procède de même avec les 3 autres termes puis on se retrouve avec la somme de 4 probabilités d'événements incompatibles. On utilise la relation du début de cette question pour conclure :

$$P(B_3 \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \frac{1}{4}P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2})$$

Avec la définition d'une probabilité conditionnelle, $P(B_3 | \overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \dfrac{1}{4}$

Q38. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
$(T_B = k) = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i}\right) \cap B_k$. Avec la définition d'une probabilité conditionnelle et le résultat admis, $P(T_B = k) = \dfrac{1}{4}P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i}\right)$.
$\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i} = (T_B \geq k) = (T_B = k) \cup (T_B \geq k+1)$ donc $P(T_B = k) = \dfrac{1}{4}(P(T_B = k) + P(T_B \geq k+1) = \dfrac{1}{4}(P(T_B = k) + 4P(T_B = k+1))$ d'où $P(T_B = k+1) = \dfrac{3}{4}P(T_B = k)$. De plus $P(T_B = 1) = \dfrac{1}{4}$ donc, pour $k \geq 1$, $P(T_B = k) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{k-1}$.

$\{T_B = k;\ k \in \mathbb{N}\}$ est un système complet d'événements donc $P(T_B = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(T_B = k) = 1 - \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1 - \frac{3}{4}}$.
Par conséquent, $P(T_B = 0) = 0$.

Q39. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(T_B = k) = \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)^{k-1}$ donc T_B suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{4}$.
On en déduit que T_B admet une espérance et $E(T_B) = 4$.