CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Les trois parties sont, dans une large mesure, indépendantes.

On s'intéresse à des opérateurs définis sur l'espace des fonctions continues et 2π-périodiques, en introduisant sur cet espace une loi dite produit de convolution.

Partie I : ETUDE D'UN PREMIER OPERATEUR

I.1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(t) = \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|.$$

I.1.a Donner l'allure de la représentation graphique de φ sur le segment $[-2\pi, 2\pi]$.

I.1.b L'application φ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? De classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? De classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$? On justifiera brièvement les réponses.

I.2. Série de Fourier de φ.

I.2.a Déterminer les coefficients de Fourier (dits exponentiels) de φ : $c_n(\varphi)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Préciser la convergence de la série de Fourier de φ.

I.2.b Justifier la convergence et calculer les sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

Dans la suite de cette partie, ainsi que dans la partie suivante, on considère E l'espace vectoriel réel des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui sont continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.

I.3. Soient $h \in E$ et $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour $s \in \mathbb{R}$ par $H(s) = \displaystyle\int_s^{s+2\pi} h(t)\,\mathrm{d}t$.

Justifier que H est une application constante sur $\mathbb{R}$.

I.4. A toute fonction $f \in E$, on associe $g = \Phi(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \left|\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)\right| f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

I.4.a Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique.

I.4.b Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

I.4.c Justifier que l'application Φ ainsi définie est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel E.

I.5. Soient $f \in E$ et $g = \Phi(f)$.

I.5.a Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $g(x) = \displaystyle\int_{x-2\pi}^{x} \sin\left(\frac{x-t}{2}\right) f(t)\,\mathrm{d}t$.

En déduire que l'on peut écrire : $\qquad g(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right) F(x) - \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) G(x)$

où l'on a posé : $F(x) = \displaystyle\int_{x-2\pi}^{x} \cos\left(\frac{t}{2}\right) f(t)\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \displaystyle\int_{x-2\pi}^{x} \sin\left(\frac{t}{2}\right) f(t)\,\mathrm{d}t$.

I.5.b En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, avec : $g'' + \dfrac{g}{4} = f$.

I.5.c Soit $n \in \mathbb{Z}$. En utilisant g'', déterminer le coefficient de Fourier $c_n(g)$ en fonction de $c_n(f)$. Grâce au calcul de I.2.a, donner une relation entre $c_n(g)$, $c_n(f)$ et $c_n(\varphi)$.

I.6. Isomorphisme.

I.6.a Soient $f \in E$, f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $g = \Phi(f)$. Montrer que $g' = \Phi(f')$.

I.6.b Soit $h \in E$, h étant supposée de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

En utilisant $g = \Phi(h)$, montrer que : $\Phi\left(h'' + \dfrac{h}{4}\right) = h$.

I.6.c Montrer que Φ établit un isomorphisme (d'espaces vectoriels) entre E et son sous-espace noté E_2 constitué des applications de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (et 2π-périodiques).

I.7. Exemples de résolution.

I.7.a Déterminer les fonctions f dans E telles que $\Phi(f) = -\dfrac{4}{3}f$; pour cela, on justifiera que $f \in E_2$ et que f est solution d'une équation différentielle du deuxième ordre que l'on résoudra.

I.7.b Déterminer les fonctions f dans E telles que $\Phi(f) = f$.

Partie II : ETUDE D'UN DEUXIEME OPERATEUR

Soit $r \in]0,1[$ fixé.

II.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction p_n par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad p_n(t) = r^n \cos(nt).$$

II.1.a Montrer la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions de terme général p_n.

II.1.b Pour tout réel t, on pose alors $P(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t)$.

En remarquant que $2\cos(nt) = e^{-int}+e^{int}$, justifier l'égalité $P(t) = \dfrac{1-r^2}{r^2 - 2r\cos(t) + 1}$.

II.2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique.

II.2.a Justifier que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

II.2.b Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On définit alors $g(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

On note aussi $g_0(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = c_0(f)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)f(t)\mathrm{d}t,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)f(t)\mathrm{d}t, \quad g_n(x) = r^n\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right).$$

Justifier alors l'égalité : $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$.

II.2.c Montrer que la fonction g ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$: pour cela, on précisera l'usage du théorème du cours concernant la classe $\mathcal{C}^1$ d'une fonction somme d'une série de fonctions.

II.2.d g étant 2π-périodique, on veut calculer ses coefficients de Fourier. Soit $p \in \mathbb{Z}$. Montrer que $c_p(g) = r^{|p|}c_p(f)$, où $c_p(g)$ et $c_p(f)$ désignent les coefficients de Fourier (exponentiels) de f et g respectivement. Pour cela, on justifiera d'abord l'intégration terme-à-terme dans l'intégrale définissant $c_p(g)$.

II.3. On considère E l'espace vectoriel réel des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et qui sont 2π-périodiques. A toute fonction $f \in E$, on associe $g = \Pi(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En procédant comme dans la question I.4, on montre que l'application Π ainsi définie est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel E, ce que l'on admettra sans avoir à en faire la démonstration.

II.3.a Grâce à II.2.d, déterminer les réels λ tels qu'il existe $f \in E$ non nulle, vérifiant $\Pi(f) = \lambda f$.

II.3.b L'endomorphisme $\Pi : E \to E$ est-il injectif ? Est-il surjectif ?

Partie III : PRODUIT DE CONVOLUTION, OPERATEURS ASSOCIES

On considère ici l'espace vectoriel complexe noté $\mathcal{C}_{2\pi}$ des applications continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$, qui sont 2π-périodiques.

On rappelle que l'on définit sur $\mathcal{C}_{2\pi}$ un produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$ et la norme associée notée ici $||\cdot||_2$ par :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}, \quad (f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}g(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}, \quad ||f||_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt}.$$

Par ailleurs, on considère la norme usuelle $||.||_\infty$, définie aussi sur $\mathcal{C}_{2\pi}$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}, \qquad ||f||_\infty = \sup\{|f(t)|, t \in \mathbb{R}\}.$$

III.1. Pour f et g dans $\mathcal{C}_{2\pi}$, on définit $h = f * g$ (dit produit de convolution de f et g), par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\ \mathrm{d}t.$$

Montrer que h ainsi définie est dans $\mathcal{C}_{2\pi}$.

III.2. Pour la suite de cette partie, on admettra sans démonstration la relation entre les coefficients de Fourier de $f * g$ et ceux de f et g :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g).$$

III.2.a Montrer que pour f et g dans $\mathcal{C}_{2\pi}$, on a : $f * g = g * f$.

III.2.b Montrer qu'il ne peut pas exister $\varepsilon \in \mathcal{C}_{2\pi}$, telle que pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ on ait : $f * \varepsilon = f$.

III.3. Soit ψ donnée dans $\mathcal{C}_{2\pi}$.
A toute fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, on associe $\Theta(f) = \psi * f$.

III.3.a Montrer que l'application Θ ainsi définie est un endomorphisme de l'espace vectoriel complexe $\mathcal{C}_{2\pi}$.

III.3.b Montrer que $S_\psi = \{c_n(\psi), n \in \mathbb{Z}\}$ est borné, que $M = \sup\{|c_n(\psi)|, n \in \mathbb{Z}\}$ existe et vérifie $M \leqslant ||\psi||_\infty$.

III.3.c Justifier que :

$$\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}, \quad ||\Theta(f)||_2 \leqslant M||f||_2.$$

Comment peut-on interpréter ce résultat ?

III.3.d Montrer que S_ψ est exactement l'ensemble des nombres complexes λ tels qu'il existe f non nulle dans $\mathcal{C}_{2\pi}$, vérifiant $\Theta(f) = \lambda f$.
Comment peut-on interpréter ce résultat ?

III.3.e Caractériser à l'aide de S_ψ l'injectivité de Θ.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 14 1313 – D'après documents fournis