1 Partie I : STABILITÉ DANS DES CAS PARTICULIERS

I.1. D'une part, $P(X) = X^2 + aX + b$ et d'autre part, en développant l'expression de la décomposition de P en produit d'irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, $P(X) = X^2 - (z_1 + z_2)X + z_1 z_2$, donc par unicité des coordonnées de P dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on en déduit $\boxed{a = -(z_1 + z_2) \text{ et } b = z_1 z_2.}$ (Ce sont les relations coefficients racines usuelles pour un polynôme de degré 2).

I.2. Étude lorsque $\Delta > 0$. En ce cas, les racines z_1, z_2 sont toutes les deux réelles, donc $\Re(z_1) = z_1$ et $\Re(z_2) = z_2$.

I.2.a Comme P est stable par hypothèse, on sait que $\Re(z_1) < 0$ et $\Re(z_2) < 0$.
Mais aussi $a = -(z_1 + z_2) = -(\Re(z_1) + \Re(z_2))$, donc a est l'opposé d'une somme de réels strictement négatifs, donc $\boxed{a > 0.}$

De la même façon, $b = z_1 z_2 = \Re(z_1)\Re(z_2)$ est produit de deux réels strictement négatifs, donc $\boxed{b > 0.}$

I.2.b. En supposant $b > 0$, on suppose que $z_1 z_2 > 0$, or on sait que z_1, z_2 sont des réels, donc ce sont des réels de même signe. Puis de $a > 0$, on tire $z_1 + z_2 < 0$, donc sachant que z_1, z_2 sont de même signe, on conclut que $z_1 < 0$ et $z_2 < 0$. Ainsi puisque z_1, z_2 sont les racines (réelles ici) de P, on peut affirmer que toutes les racines de P ont leur partie réelle qui est strictement négative, soit $\boxed{P \text{ est stable.}}$

I.3. Comme on suppose ici $\Delta = 0$, les racines de P sont $z_1 = z_2 = \frac{-a}{2}$ et de plus, $b = \frac{a^2}{4}$. Ainsi P est stable si et seulement si $\frac{-a}{2} < 0$ donc si et seulement si $a > 0$, et sachant $b = \frac{a^2}{4}$, $a > 0$ si et seulement si a et b sont strictement positifs. Finalement, dans le cas où $\Delta = 0$, on a aussi $\boxed{P \text{ est stable si et seulement si } a > 0 \text{ et } b > 0.}$

I.4. Enfin, on suppose dans cette question que $\Delta < 0$. Les racines de P sont alors complexes conjuguées de la forme $\alpha \pm i\beta$, avec $\alpha = \frac{-a}{2}$ et $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$.

I.4.a. Comme écrit précédemment, les racines sont conjuguées, soit $\boxed{z_2 = \overline{z_1}.}$

I.4.b. P est stable si et seulement si $\alpha < 0$, soit si et seulement si $\frac{-a}{2} < 0$ ce qui équivaut à $a > 0$ et comme dans le cas où $\Delta < 0$, on a $b > \frac{a^2}{4}$, on en déduit que $\boxed{P \text{ est stable si et seulement si } a > 0 \text{ et } b > 0.}$

On a montré aux questions 2. 3. et 4. le résultat suivant

$$\boxed{P = X^2 + aX + b \text{ est stable si et seulement si } \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}}$$

I.5. Application aux matrices de taille 2

I.5.a. Le calcul est immédiat et permet de retrouver le résultat connu $\chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A)$. Posons en effet $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$, alors $\chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} - X & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - X \end{pmatrix} = X^2 - (a_{1,1} + a_{2,2})X + (a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1})$ et également, $\mathrm{Tr}(A) = a_{1,1} + a_{2,2}$ et $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$. D'où comme prévu, $\boxed{\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A).}$

I.5.b. Par définition, A est stable si et seulement si χ_A est stable. Or χ_A est unitaire de degré 2, donc d'après le résultat précédemment établi pour les polynômes unitaires de degré 2, et d'après l'expression de χ_A rappelée à la question précédente, χ_A est stable si et seulement si $-\mathrm{Tr}(A) > 0$ et $\det(A) > 0$. Enfin, $n = 2$ donc $(-1)^n \det(A) = \det(A)$. Si bien que

$$\boxed{A \text{ est stable si et seulement si } \begin{cases} \mathrm{Tr}(A) < 0 \\ (-1)^n \det(A) \end{cases}}$$

I.6. Un contre-exemple pour $n = 3$.

I.6.a. Q admet -1 comme racine évidente $Q(X) = (X + 1)(X^2 + 1)$, donc
$\boxed{\text{les racines de } Q \text{ sont les nombres complexes } -1, i, -i.}$

I.6.b. $\boxed{\mathrm{Tr}(B) = -1 < 0 \text{ et } (-1)^n \det(B) = -(-1) = 1 > 0.}$

I.6.c. $\Re(i) = 0$, donc Q possède une racine de partie réelle positive ou nulle, ce qui montre que $\boxed{Q \text{ n'est pas stable.}}$
Calculons le polynôme caractéristique de B.En développant le déterminant par rapport à la dernière ligne, il vient

$$\chi_B = \det \begin{pmatrix} -X & 1 & 0 \\ -1 & -X & 1 \\ 0 & 0 & -1 - X \end{pmatrix} = (-1 - X)(X^2 + 1) = -Q(X).$$

On a prouvé que Q n'est pas stable, donc $\chi_B = -Q$ est non stable également (Q et $-Q$ ont en effet les mêmes racines). Par définition d'une matrice stable, on peut conclure que $\boxed{B \text{ est non stable.}}$

2 Partie II : NORME SUBORDONNÉE ET MESURE DE LOZINSKII

II.1. Existence et propriétés de la norme subordonnée

II.1.a. Une application N définie sur $\mathbb{K}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ est une norme lorsqu'elle vérifie les axiomes suivants
- Séparation : Pour tout vecteur $x \in \mathbb{K}^n$, l'assertion $N(x) = 0$ entraîne $x = 0_{\mathbb{K}^n}$.
- Homogénéité : Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour tout vecteur $x \in \mathbb{K}^n$, $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$.
- Inégalité triangulaire : Pour tous vecteurs $x, y \in \mathbb{K}^n$, $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

II.1.b. L'application $x \mapsto \|Ax\|$ est composée de $x \mapsto Ax$ qui est linéaire sur l'espace de dimension finie $\mathbb{K}^n$ donc continue de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^n$ et de $\| \, . \, \|$, qui est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{K}^n$ (conséquence de l'inégalité triangulaire généralisée : $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$) donc également continue sur $\mathbb{K}^n$. Il en résulte que $\boxed{x \mapsto \|Ax\| \text{ est continue sur } \mathbb{K}^n.}$

II.1.c. Appelons φ l'application précédente $x \mapsto \|Ax\|$. C'est donc une application continue sur $\mathbb{K}^n$. Cet espace étant de dimension finie, comme la sphère unité est fermée et bornée, c'est un compact de $\mathbb{K}^n$. D'après le théorème de Weierstrass, toute application continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes sur ce compact. On en déduit que φ est bornée sur $\mathcal{B}$ et atteint son maximum sur $\mathcal{B}$ en un point de $\mathcal{B}$; notons $x_0 \in \mathcal{B}$ un point en lequel φ atteint son maximum. On a alors

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{B}, \quad \|Ax\| \leq \|Ax_0\| = \sup_{x \in \mathcal{B}} \|Ax\| .}$$

II.1.d. Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $\|I_n x\| = \|x\|$, donc $x \mapsto \|I_n x\|$ est constante égale à 1 sur $\mathcal{B}$, son maximum sur $\mathcal{B}$ est donc 1, ce qui s'écrit $\boxed{|||I_n||| = 1.}$

II.1.e. Soit $x \in \mathbb{K}^n$, si $x = 0_{\mathbb{K}^n}$ alors $\|Ax\| = 0 = |||A|||\, \|x\|$. Maintenant, si $x \neq 0_{\mathbb{K}^n}$, alors on pose $x' = \frac{x}{\|x\|}$, ainsi $x' \in \mathcal{B}$ et $x = \|x\|\, x'$. Il vient par linéarité, $Ax = \|x\|\, Ax'$, donc aussi par homogénéité de la norme $\|Ax\| = \|x\|\, \|Ax'\|$. Enfin, $x' \in \mathcal{B}$ donc par définition de la norme subordonnée, $\|Ax'\| \leq |||A|||$. Et on en tire, $\|Ax\| \leq |||A|||\, \|x\|$. Dans tous les cas, on a établi l'inégalité

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{K}^n, \quad \|Ax\| \leq |||A|||\, \|x\| .}$$

II.1.f. On a admis que la norme subordonnée est une norme, donc elle vérifie l'inégalité triangulaire.
Soient alors A et B deux matrices quelconques de taille n, on peut écrire $A = B + (A - B)$ d'où par l'inégalité triangulaire $|||A||| \leq |||B||| + |||A - B|||$ et donc

$$\boxed{|||A||| - |||B||| \leq |||A - B||| .}$$

D'autre part, soit x quelconque dans $\mathcal{B}$ en appliquant le résultat de II.1.e. à la matrice A avec le vecteur Bx, il vient $\|ABx\| \leq |||A|||\, \|Bx\|$. Puis x étant dans $\mathcal{B}$, la définition de $|||B|||$ assure $\|Bx\| \leq |||B|||$, donc $\|ABx\| \leq |||A|||\, |||B|||$. Ainsi, $|||A|||\, |||B|||$ est un majorant de $x \mapsto \|ABx\|$ sur $\mathcal{B}$, comme $|||AB|||$ est par définition le plus petit des majorants de cette application sur $\mathcal{B}$, on en déduit

$$\boxed{|||AB||| \leq |||A|||\, |||B||| .}$$

II.2. u est réel et λ est complexe, donc $|1 + u\lambda|^2 = (1+u\lambda)(1+u\overline{\lambda})$; on a donc $|1 + u\lambda| = \sqrt{1 + (\lambda + \overline{\lambda})u + \lambda\overline{\lambda}u^2}$.
Au voisinage de 0, $\sqrt{1 + (\lambda + \overline{\lambda})u + \lambda\overline{\lambda}u^2} = 1 + \frac{\lambda+\overline{\lambda}}{2}u + o_0(u)$, donc $|1 + u\lambda| = 1 + \Re(\lambda)u + o_0(u)$. On en déduit aussitôt

$$\boxed{\lim_{u \to 0^+} \left(\frac{|1 + u\lambda| - 1}{u} \right) = \Re(\lambda).}$$

II.3. Vers la mesure de Lozinskii

II.3.a. Par homogénéité de la norme subordonnée, pour tout $u > 0$, $\frac{|||I_n + uA|||}{u} = \left|\left|\left| u^{-1} I_n + A \right|\right|\right|$, et de même pour tout $v > 0$, $\frac{|||I_n + vA|||}{v} = \left|\left|\left| v^{-1} I_n + A \right|\right|\right|$, donc il vient

$$\boxed{\mu(A,u) - \mu(A,v) = \left|\left|\left| u^{-1} I_n + A \right|\right|\right| - \left|\left|\left| v^{-1} I_n + A \right|\right|\right| - (u^{-1} - v^{-1}).}$$

II.3.b. En appliquant II.1.f. aux matrices $u^{-1}I_n + A$ et $v^{-1}I_n + A$, il vient $|||u^{-1}I_n + A||| - |||v^{-1}I_n + A||| \leq |||(u^{-1} - v^{-1})I_n|||$ or par homogénéité de la norme subordonnée, $|||(u^{-1} - v^{-1})I_n||| = |u^{-1} - v^{-1}|$ Comme on suppose pour cette question $0 < u \leq v$, $|u^{-1} - v^{-1}| = u^{-1} - v^{-1}$. On passe alors à $\mu(A, u) - \mu(A, v)$avec l'expression établie en II.3.a. ce qui donne comme inégalité

$$\mu(A, u) - \mu(A, v) \leq (u^{-1} - v^{-1}) - (u^{-1} - v^{-1})$$

Et on a bien établi de la sorte, $\boxed{\mu(A, u) - \mu(A, v) \leq 0.}$

Autrement dit, on a montré ici que $u \mapsto \mu(A, u)$ est une fonction croissante sur $]0, +\infty[$. On va maintenant montrer qu'elle est minorée sur $]0, +\infty[$ ce qui permettra de conclure qu'elle possède une limite en 0^+.

II.3.c. Pour tout $u > 0$, $\mu(A, u) = |||u^{-1}I_n + A||| - u^{-1}$. Or d'après l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de la norme subordonnée, $|||u^{-1}I_n + A||| \leq u^{-1}\underbrace{|||I_n|||}_{=1} + |||A|||$. Donc on en déduit déjà pour tout $u > 0$, $\boxed{\mu(A, u) \leq |||A|||.}$

D'autre part, en utilisant II.1.f avec les matrices I_n et uA, on obtient $|||I_n||| - |||-uA||| \leq |||I_n - (-uA)|||$, soit à l'aide de II.1.d. et par homogénéité de la norme subordonnée

$$\forall u > 0, \quad 1 - u\,|||A||| \leq |||I_n + uA|||$$

On passe à $\mu(A, u)$ ce qui donne

$$\boxed{-\,|||A||| \leq \mu(A, u).}$$

II.3.d. D'après II.3.b., la fonction $u \mapsto \mu(A, u)$ est croissante sur l'ouvert $]0, +\infty[$ et d'après II.3.e. elle est minorée par $-\,|||A|||$ sur ce même intervalle ouvert. D'après le théorème de convergence des fonctions monotones sur un intervalle ouvert, on peut en déduire que $\boxed{u \mapsto \mu(A, u) \text{ possède une limite en } 0^+.}$

II.4. Une condition suffisante de stabilité à l'aide la mesure de Lozinskii

II.4.a. λ étant valeur propre de A, il existe $x_0 \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que $Ax_0 = \lambda x_0$. Normons x_0 (possible puisque c'est un vecteur non nul), on pose donc $x = \frac{x_0}{\|x_0\|}$. Ainsi $x \in \mathcal{B}$ et $Ax = \frac{Ax_0}{\|x_0\|} = \frac{\lambda x_0}{\|x_0\|} = \lambda x$. Ce qui montre

$$\boxed{\exists x \in \mathbb{C}^n, \ \begin{cases} \|x\| = 1 \\ Ax = \lambda x \end{cases}}$$

De plus, pour un tel vecteur x, pour tout réel $u > 0$, $(I_n + uA)x = x + u\lambda x = (1 + \lambda)x$, donc par homogénéité de la norme $\boxed{\|(I_n + uA)x\| = |1 + u\lambda|\,.}$

II.4.b. Le vecteur x de la question précédente étant dans $\mathcal{B}$, par définition de la norme subordonnée, $|||I_n + uA||| \geq \|(I_n + uA)x\|$, et donc avec II.4.a. on en déduit $|||I_n + uA||| \geq |1 + u\lambda|$. On en déduit $\mu(A, u) \geq \frac{|1+u\lambda|-1}{u}$. On a étudié la limite de chaque membre de l'inégalité lorsque $u \to 0^+$, donc on peut passer à la limite dans cette inégalité pour obtenir finalement (avec les résultats de II.2. et de II.3.d.) $\boxed{\Re(\lambda) \leq \mu(A).}$

II.4.c. Il suffit donc que $\mu(A) < 0$ pour que chaque valeur propre de A soit de partie réelle strictement négative. Autrement dit, $\boxed{\mu(A) < 0 \text{ est suffisant pour que } A \text{ soit stable.}}$

3 NORMES ET MESURES DE LOZINSKII ASSOCIÉES

III.1. Par définition de la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\|(I_n + uA)x\|_2^2 &= {}^t(X + uAX)(X + uAX)\\ &= {}^tXX + u({}^tXAX + {}^tX\,{}^tAX) + u^2\,{}^tX\,{}^tAAX\\ &= {}^tXX + u\,{}^tX(A + {}^tA)X + u^2\,{}^tX\,{}^tAAX.\end{aligned}$$

Ce qui montre comme attendu

$$\boxed{\|(I_n + uA)x\|_2^2 = {}^tXX + u\,{}^tX({}^tA + A)X + u^2\,{}^tX\,{}^tAAX.}$$

III.2. A étant réelle, la matrice $A + {}^tA$ est réelle mais aussi symétrique, ce qui permet d'appliquer le théorème spectral : $A + {}^tA$ est orthogonalement diagonalisable. Précisons : en notant $\alpha_1, ..., \alpha_n$ les valeurs propres de $A + {}^tA$ rangées dans l'ordre décroissant,

$$\boxed{\exists M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ {}^tA + A = M\,\mathrm{Diag}(\alpha_1, ..., \alpha_n)M^{-1} = M\,\mathrm{Diag}(\alpha_1, ..., \alpha_n)\,{}^tM.}$$

III.3. Mesure de Lozinskii associée à la norme euclidienne

III.3.a. M est orthogonale, donc $M\,{}^tM = I_n$ d'où en posant $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on en déduit $\|y\|_2^2 = {}^t({}^tMX)\,{}^tMX = {}^tXM\,{}^tMX = {}^tXX = \|x\|_2^2$. (C'est la traduction matricielle de la conservation de la norme par un endomorphisme orthogonal). Comme $\|x\|_2 = 1$ par hypothèse, on peut conclure $\boxed{\sum_{i=1}^n y_i^2 = 1.}$

III.3.b. On applique III.1. en sachant ${}^tXX = 1$, et également ${}^tA + A = M\,\mathrm{Diag}(\alpha_1, ..., \alpha_n)\,{}^tM$, il vient

$$\|(I_n + uA)x\|_2^2 = 1 + u\,{}^tXM\,\mathrm{Diag}(\alpha_1, ..., \alpha_n)\,{}^tMX + u^2\,{}^tX^tAAX.$$

Or ${}^tY\,\mathrm{Diag}(\alpha_1, ..., \alpha_n)Y = {}^tY \begin{pmatrix} \alpha_1 y_1 \\ \vdots \\ \alpha_n y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^2$, par conséquent

$$\boxed{\|(I_n + uA)x\|_2^2 = 1 + u\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^2 + u^2\,{}^tX\,{}^tAAX.}$$

III.3.c. C'est encore une application du théorème de Weierstrass : $x \mapsto AX$ est linéaire en dimension finie donc continue sur $\mathbb{R}^n$, la norme euclidienne est continue, donc son carré aussi, par composition, $x \mapsto {}^t(AX)(AX)$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ donc aussi sur sa sphère unité qui est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$. Il en résulte que $X \mapsto {}^tX\,{}^tAAX$ est bornée sur $\mathcal{B}$ (et atteint ses bornes). Cela se traduit par

$$\boxed{\exists \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXX = 1 \Rightarrow \gamma \leq {}^tX\,{}^tAAX \leq \delta.}$$

III.3.d. Soit $u > 0$. En combinant III.3.b. et III.3.c. on obtient déjà l'encadrement

$$1 + u\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^2 + \gamma u^2 \leq \|(I_n + uA)x\|_2^2 \leq 1 + u\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^2 + \delta u^2.$$

De plus, les réels α_i étant rangés par ordre décroissant, $\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^2 \leq \alpha_1 \sum_{i=1}^n y_i^2$ d'après III.3.a. Donc

$$1 + u\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^2 + \gamma u^2 \leq \|(I_n + uA)x\|_2^2 \leq 1 + \alpha_1 u + \delta u^2.$$

Cette inégalité est valable pour tout vecteur $x \in \mathcal{B}$; $\mathcal{B}$ désignant ici la sphère de $\mathbb{R}^n$ au sens de la norme euclidienne.

- En prenant en particulier $x = x_0$ vecteur de $\mathcal{B}$ qui atteint la norme subordonnée de $I_n + uA$ dans l'inégalité de droite précédente, il vient $|||I_n + uA|||_2^2 \leq 1 + \alpha_1 u + \delta u^2$.
- D'autre part, prenons $x = M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, c'est possible car x est alors l'image par une matrice orthogonale d'un vecteur $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ de norme 1, donc par conservation de la norme (comme en III.3.a.) $\|x\| = \|y\| = 1$; l'inégalité de gauche donne alors $1 + 1\alpha_1 u + \gamma u^2 \leq \|(I_n + uA)x\|_2^2 \leq |||I_n + uA|||_2^2$

On a ainsi établi pour tout $u > 0$,

$$\boxed{\sqrt{1 + \alpha_1 u + \gamma u^2} \leq |||I_n + uA|||_2 \leq \sqrt{1 + \alpha_1 u + \delta u^2}.}$$

III.3.e. De l'encadrement précédent, on déduit aussitôt pour tout $u > 0$

$$\frac{\sqrt{1+\alpha_1 u+\gamma u^2}-1}{u} \leq \mu(A,u) \leq \frac{\sqrt{1+\alpha_1 u+\delta u^2}-1}{u}$$

Or $\sqrt{1+\alpha_1 u+\gamma u^2}-1 = \frac{\alpha_1 u}{2}+o_0(u)$ et de même $\sqrt{1+\alpha_1 u+\delta u^2}-1 = \frac{\alpha_1}{2}u+o_0(u)$, donc

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{\sqrt{1+\alpha_1 u+\gamma u^2}-1}{u} = \lim_{u\to 0^+}\frac{\sqrt{1+\alpha_1 u+\delta u^2}-1}{u} = \frac{\alpha_1}{2}.$$

On conclut alors avec le théorème des limites : $\lim_{u\to 0^+}\mu(A,u) = \frac{\alpha_1}{2}$. Et donc par définition de $\mu_2(A)$, on a prouvé

$$\boxed{\mu_2(A) = \frac{\alpha_1}{2} = \max\left\{\lambda\in\mathbb{R},\ \text{tel que}\ \ \lambda\in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\left(\frac{{}^tA+A}{2}\right)\right\}}$$

La dernière égalité découle de ce que α_1 est la plus grande valeur propre de ${}^tA+A$ (vu en III.2.) et de ce que si λ est valeur propre d'une matrice M, alors λa est valeur propre de aM.

III.4. Une norme subordonnée à une autre norme sur $\mathbb{K}^n$.

III.4.a. Notons $\mathcal{B}_H$ la sphère unité pour la norme $\|\ .\ \|_H$.
Soit $x\in\mathcal{B}_H$, donc $\|HX\|_2 = 1$. Posons alors $y = Hx$, ainsi $y\in\mathcal{B}_2$ où $\mathcal{B}_2$ désigne la sphère unité pour la norme euclidienne.

$$\|Ax\|_H = \|HAx\|_2 = \left\|HAH^{-1}Hx\right\|_2 = \left\|HAH^{-1}y\right\|_2$$

Comme $\|y\|_2 = 1$, par définition de la norme subordonnée associée à la norme euclidienne, on a $\left\|HAH^{-1}y\right\|_2 \leq \left|\!\left|\!\left|HAH^{-1}\right|\!\right|\!\right|_2$. On en déduit

$$\forall x\in\mathcal{B}_H,\quad \|Ax\|_H \leq \left|\!\left|\!\left|HAH^{-1}\right|\!\right|\!\right|_2$$

Et donc en prenant le maximum, on obtient déjà l'inégalité $|\!|\!|A|\!|\!|_H \leq \left|\!\left|\!\left|HAH^{-1}\right|\!\right|\!\right|_2$.
Ensuite pour un vecteur x quelconque dans $\mathcal{B}_2$, on a $\left\|HAH^{-1}x\right\|_2 = \|H(Ax')\|_2 = \|Ax'\|_H$. Où on a posé cette fois $x' = H^{-1}x$. Comme $\|x\|_2 = 1$, on a aussi $\left\|HH^{-1}x\right\|_2 = 1$, donc $\|Hx'\|_2 = 1$, soit $\|x'\|_H = 1$. Ainsi $x'\in\mathcal{B}_H$, ce qui permet d'écrire $\|Ax'\|_H \leq |\!|\!|A|\!|\!|_H$. Donc de nouveau, $\left\|HAH^{-1}x\right\|_2 \leq |\!|\!|A|\!|\!|_H$. Et donc pour le maximum, cela donne $\left|\!\left|\!\left|HAH^{-1}\right|\!\right|\!\right|_2 \leq |\!|\!|A|\!|\!|_H$. Finalement, on a établi

$$\boxed{|\!|\!|A|\!|\!|_H = \left|\!\left|\!\left|HAH^{-1}\right|\!\right|\!\right|_2.}$$

III.4.b. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a donc d'après III.4.a.

$$\begin{aligned}\forall u>0,\quad \mu(A,u) &= \frac{|\!|\!|I_n+uA|\!|\!|_H-1}{u}\\ &= \frac{\left|\!\left|\!\left|H(I_n+uA)H^{-1}\right|\!\right|\!\right|_2-1}{u}\\ &= \frac{\left|\!\left|\!\left|I_n+uHAH^{-1}\right|\!\right|\!\right|_2-1}{u}\\ &= \mu_2(HAH^{-1},u)\end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque $u\to 0^+$, on a donc $\boxed{\mu_H(A) = \mu_2(HAH^{-1}).}$

4 Partie IV : UN CRITÈRE DE STABILITÉ EN DEGRÉ 3

IV.1. On procède comme en I. par identification des coordonnées de P dans la base canonique de $\mathbb{K}_3[X]$. D'une part, $P = X^3+aX^2+bX+c$ et d'autre part, $P(X) = X^3-(z_1+z_2+z_3)X^2+(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)X-z_1z_2z_3$, d'où $\boxed{\begin{cases} a = -(z_1+z_2+z_3)\\ b = z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3\\ c = -z_1z_2z_3\end{cases}}$ On développe alors $ab-c$ avec les expressions ainsi obtenues pour a,b,c et par un calcul sans surprise aucune on obtient comme annoncé

$$\boxed{ab-c = -{z_1}^2z_2 - z_1^2z_3 - {z_2}^2z_1 - z_2^2z_3 - z_3^2z_1 - z_3^2z_2 - 2z_1z_2z_3}$$

IV.2. P est un polynôme unitaire de degré 3, donc $P(x) \sim_{x\to\pm\infty} x^3$, donc $\lim_{-\infty} P = -\infty$ et $\lim_{+\infty} P = +\infty$. En particulier, P prend des valeurs négatives et des valeurs positives, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires qui s'applique ici, P étant continue, on en déduit l'existence d'une annulation de P sur $\mathbb{R}$, donc $\boxed{P \text{ possède au moins une racine réelle.}}$

IV.3. Cas où les trois racines de P sont réelles

IV.3.a. D'après les relations coefficients racines d'un polynôme, rappelées en IV.1. $z_3 = -a - z_1 - z_2$; si $\beta_2 = 0$, alors $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ et par hypothèse $a \in \mathbb{R}$, ainsi $z_3 \in \mathbb{R}$ ou encore $\boxed{\beta_3 = 0.}$

IV.3.b. Supposons que P est stable, alors $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 < 0$, $\alpha_3 < 0$, et nous sommes dans le cas où $z_1 = \alpha_1, z_2 = \alpha_2$ et $z_3 = \alpha_3$. On tire immédiatement des relations établies en IV.1. $a = -z_1 - z_2 - z_3 > 0$, $b = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 > 0$, $c = -z_1z_2z_3 > 0$. De plus pour tout $i \neq j$, $z_i^2 z_j < 0$ et $z_1z_2z_3 < 0$, donc on a aussi $ab - c > 0$. Il en résulte que la propriété $\mathcal{H}$ est vérifiée. Ainsi, $\boxed{\text{si } P \text{ est stable, alors } \mathcal{H} \text{ est vérifiée.}}$

IV.4. Cas où $\beta \neq 0$.

IV.4.a. z_2 est complexe non réel et vérifie $P(z_2) = 0$, c'est à dire $z_2^3 + az_2^2 + bz_2 + c = 0$. On conjugue en tenant compte du fait que a, b, c sont réels ; il vient $\overline{z_2}^3 + a\overline{z_2}^2 + b\overline{z_2} + c = 0$. Ce qui s'écrit encore $P(\overline{z_2}) = 0$. Les racines sont z_1 réelles, z_2 complexe non réelle et z_3. Comme $\overline{z_2}$ est racine complexe non réelle de P distincte de z_1 et de z_2, on en déduit $z_3 = \overline{z_2}$, donc $\boxed{\alpha_3 = \alpha_2 \text{ et } \beta_3 = -\beta_2.}$

IV.4.b. On remplace dans les expressions de IV.1. z_1 par α_1, z_2 par $\alpha_2 + i\beta_2$ et z_3 par $\alpha_2 - i\beta_2$, il vient aussitôt

$$\boxed{\begin{cases} a = -(\alpha_1 + 2\alpha_2) \\ b = 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 \\ c = -\alpha_1(\alpha_2^2 + \beta_2^2) \\ ab - c = -4\alpha_1\alpha_2^2 - 2\alpha_2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2) \end{cases}}$$

IV.4.c. Supposons P stable, on a donc $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tous strictement négatifs.Les expressions obtenues à la question précédente donnent aussitôt le signe de $a, b, c, ab-c$. Tous ces réels sont strictement positifs, donc $\boxed{P \text{ vérifie la propriété } \mathcal{H}.}$

IV.5. Si P vérifie la propriété $\mathcal{H}$, alors $c > 0$, or $c = -\alpha_1(\alpha_2^2 + \beta_2^2)$, donc on en déduit déjà $\alpha_1 < 0$, et en particulier $\Re(z_1) \neq 0$. Ensuite on distingue les cas

- Si P a trois racines réelles, alors $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = z_1z_2z_3 = -c < 0$, donc $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$.
- Si P admet α_1 pour racine réelle et $\alpha_2 \pm i\beta_2$ pour racines complexes conjuguées, alors par IV.4.b. $ab - c = -2\alpha_2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2$ et comme P vérifie la propriété $\mathcal{H}$, $ab - c > 0$, en particulier $ab - c \neq 0$, donc $\alpha_2 \neq 0$. Comme $\Re(z_2) = \Re(z_3)$ d'après IV.4.a. on en déduit encore $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ non nuls.

Finalement, dans tous les cas,

$\boxed{\text{lorsque } P \text{ vérifie la propriété } \mathcal{H}, \text{ chaque racine de } P \text{ est de partie réelle non nulle.}}$

IV.6. La réciproque de IV.3. et IV.4.

IV.6.a. On calcule $\chi_{A'}$ en développant par rapport à la première ligne

$$\begin{aligned}
\chi_{A'} &= \det \begin{pmatrix} -X & 1 & 0 \\ -c' & -X & 1 \\ 0 & -b' & -a' - X \end{pmatrix} \\
&= -X \det \begin{pmatrix} -X & 1 \\ -b' & -a' - X \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} -c' & 1 \\ 0 & -a' - X \end{pmatrix} \\
&= -X(X^2 + a'X + b') - (a'c' + c'X') \\
&= -(X^3 + a'X^2 + (b' + c')X + a'c')
\end{aligned}$$

Enfin, puisque $a' = a$, $b' + c' = b$, $a'c' = c$, on a montré $\boxed{\chi_{A'}(X) = -(X^3 + aX^2 + bX + c) = -P(X).}$

IV.6.b.

$$\begin{aligned}
B' = HA4H^{-1} &= \mathrm{Diag}(\sqrt{a'b'c'}, \sqrt{a'b'}, \sqrt{a'}) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{a'b'}} & 0 \\ \frac{-c'}{\sqrt{a'b'c'}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{a'}} \\ 0 & \frac{-b'}{\sqrt{a'b'}} & \frac{-a'}{\sqrt{a'}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{c'} & 0 \\ -\sqrt{c'} & 0 & \sqrt{b'} \\ 0 & -\sqrt{b'} & -a' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\frac{{}^tB' + B'}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}}$$

IV.6.c. On a déterminé $\frac{{}^tB'+B'}{2}$ sous forme diagonale, ce qui permet de lire le spectre directement sur la diagonale. Les valeurs propres de $\frac{{}^tB'+B'}{2}$ sont 0 double et $-a$ simple. Comme par hypothèse $a > 0$, la plus grande valeur propre de $\frac{{}^tB'+B'}{2}$ est 0. Or en III.3.e., nous avons montré que $\mu_2(B')$ est la plus grande valeur propre de $\frac{{}^tB'+B'}{2}$. On peut donc conclure $\mu_2(B') = 0$. Ensuite, D'après III.4.b. $\mu_H(A') = \mu_2(HA'H^{-1}) = \mu_2(B')$. D'où finalement, $\boxed{\mu_H(A') = 0.}$

IV.6.d. On a démontré en II

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A'), \quad \Re(\lambda) \leq \mu_H(A')$$

Donc avec le résultat de IV.6.c. on en déduit que toutes les valeurs propres de A' sont de partie réelle négative ou nulle. Mais de plus, en IV.5. on a montré que ces parties réelles étaient toutes non nulles, donc finalement la partie réelle de chaque valeur propre complexe de A' est strictement négative. Autrement dit, A' est stable et donc $\boxed{P \text{ est stable.}}$

5 Partie V : EXEMPLE DE SYSTÈME DIFFÉRENTIEL STABLE

V.1. On développe encore une fois le déterminant par rapport à la première ligne

$$\begin{aligned} \chi_C(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-2-\lambda)(\lambda^2 - 1 + 2) - (4 - 2 + 2\lambda \\ &= -\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda - 4 \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\boxed{-\chi_C(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4.}$

V.2. Ici, $a = 2 > 0$, $b = 3 > 0$, $c = 4 > 0$ et $ab - c = 2.3 - 4 = 2 > 0$, donc $-\chi_C$ vérifie la propriété $\mathcal{H}$. D'après le résultat de la partie IV. cela permet d'affirmer que $-\chi_C$ est stable et donc $\boxed{C \text{ est stable.}}$

V.3. Étudions la fonction polynomiale $x \mapsto x^3 + 2x^2 + 3x + 4$, sa dérivée $x \mapsto 3x^2 + 4x + 3$ est polynomiale de degré 2 avec discriminant $\Delta = 4 - 9 < 0$, donc $x \mapsto x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ est strictement croissante de limite $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$. D'après le théorème de la bijection, on en déduit que χ_C réalise une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Et donc χ_C possède une unique racine réelle. (Comme $\chi_C(0) = -4 < 0$, on en déduit que cette racine réelle z_1 est strictement négative.) Les deux autres racines de χ_C sont donc complexes conjuguées non réelles (comme en IV.4.a.). Par conséquent, χ_C possède trois valeurs propres complexes distinctes en dimension 3 et est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Enfin C est stable donc en conservant les notations des parties précédentes, $\alpha_1, \alpha_2 < 0$. Ainsi

$$\boxed{\exists \alpha_1, \alpha_2 < 0,\ \exists \beta_2 \neq 0,\ \exists U \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}), \quad C = UDU^{-1},\ D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2 + i\beta_2, \alpha_2 - i\beta_2)}$$

V.4. Application de la stabilité

V.4.a. $Y = UX$ donc chaque composante de Y est combinaison linéaire des composantes de X, donc si X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ alors Y aussi ; mais puisque U est inversible, on a également $X = U^{-1}Y$, donc si Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, alors X aussi. Finalement, X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si Y l'est.

X est solution de (S) sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $X' = CX$. Or U étant inversible, $X' = CX$ équivaut à $U^{-1}X' = U^{-1}CX$, mais $X = UY$, donc $X' = CX$ équivaut à $U^{-1}UY' = U^{-1}CUY$, soit encore $Y' = DY$. Finalement,

$\boxed{X \text{ est solution de } (S) \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ si et seulement si } Y \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ et vérifie } Y' = DY.}$

V.4.b. En posant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $Y' = DY$ s'écrit $\begin{cases} y_1' = \alpha_1 y_1 \\ y_2' = (\alpha_2 + i\beta_2) y_2 \\ y_3' = (\alpha_2 - i\beta_2) y_3 \end{cases}$ Ces équations sont de simples équations différentielles homogènes du premier ordre à coefficients constants. On obtient donc Y solution de $Y' = DY$ sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si

$$\boxed{\exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{C}^3,\ \forall t\geq 0,\quad Y(t)=\begin{pmatrix}\lambda_1 e^{\alpha_1 t}\\ \lambda_2 e^{(\alpha_2+i\beta_2)t}\\ \lambda_3 e^{(\alpha_2-i\beta_2)t}\end{pmatrix}}$$

V.4.c. Si X est solution de (S) alors il existe des complexes $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ tels que $X = U\begin{pmatrix}\lambda_1 e^{\alpha_1 t}\\ \lambda_2 e^{(\alpha_2+i\beta_2)t}\\ \lambda_3 e^{(\alpha_2-i\beta_2)t}\end{pmatrix}$, et donc il existe des complexes $\lambda_{i,j}$ avec $1\leq i,j\leq 3$ tels que

$$X=\begin{pmatrix}\lambda_{1,1}e^{\alpha_1 t}+\lambda_{1,2}e^{(\alpha_2+i\beta_2)t}+\lambda_{1,3}e^{(\alpha_2-i\beta_2)t}\\ \lambda_{2,1}e^{\alpha_1 t}+\lambda_{2,2}e^{(\alpha_2+i\beta_2)t}+\lambda_{2,3}e^{(\alpha_2-i\beta_2)t}\\ \lambda_{3,1}e^{\alpha_1 t}+\lambda_{3,2}e^{(\alpha_2+i\beta_2)t}+\lambda_{3,3}e^{(\alpha_2-i\beta_2)t}\end{pmatrix}$$

mais en notant $\Re(\lambda_{i,j}) = a_{i,j}$ et $\Im(\lambda_{i,j}) = b_{i,j}$ pour $(i,j)\in [\![1,3]\!]^2$, il vient pour tout $k\in[\![1,3]\!]$

$$\begin{cases}\lambda_{k,1}e^{\alpha_1 t} = a_{k,1}e^{\alpha_1 t} + ib_{k,1}e^{\alpha_1 t}\\ \lambda_{k,2}e^{(\alpha_2+i\beta_2)t} = (a_{k,2}\cos\beta_2 t - b_{k,2}\sin\beta_2 t)e^{\alpha_2 t} + i(a_{k,2}\sin\beta_2 t + b_{k,2}\cos\beta_2 t)e^{\alpha_2 t}\\ \lambda k,3e^{(\alpha_2-i\beta_2)t} = (a_{k,3}\cos\beta_2 t + b_{k,3}\sin\beta_2 t)e^{\alpha_2 t} + i(-a_{k,3}\sin\beta_2 t + b_{k,3}\cos\beta_2 t)e^{\alpha_2 t}\end{cases}$$

Donc comme X est à valeurs réelles, $X = \Re(X)$, ce qui entraîne

$$X=\begin{pmatrix}a_{1,1}e^{\alpha_1 t}+(a_{1,2}\cos\beta_2 t - b_{1,2}\sin\beta_2 t)e^{\alpha_2 t}+(a_{1,3}\cos\beta_2 t + b_{1,3}\sin\beta_2 t)e^{\alpha_2 t}\\ a_{2,1}e^{\alpha_1 t}+(a_{2,2}\cos\beta_2 t - b_{2,2}\sin\beta_2 t)e^{\alpha_2 t}+(a_{2,3}\cos\beta_2 t + b_{2,3}\sin\beta_2 t)e^{\alpha_2 t}\\ a_{3,1}e^{\alpha_1 t}+(a_{3,2}\cos\beta_2 t - b_{3,2}\sin\beta_2 t)e^{\alpha_2 t}+(a_{3,3}\cos\beta_2 t + b_{3,3}\sin\beta_2 t)e^{\alpha_2 t}\end{pmatrix}$$

Il reste à poser $X_1 = \begin{pmatrix}a_{1,1}\\ a_{2,1}\\ a_{3,1}\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix}a_{1,2}+a_{1,3}\\ a_{2,2}+a_{2,3}\\ a_{3,2}+a_{3,3}\end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix}b_{1,3}-b_{1,2}\\ b_{2,3}-b_{2,2}\\ b_{3,3}-b_{3,2}\end{pmatrix}$; ainsi $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R}_+,\quad X(t) = e^{\alpha_1 t}X_1 + e^{\alpha_2 t}\cos(\beta_2 t)X_2 + e^{\alpha_2 t}\sin(\beta_2 t)X_3.}$$

V.4.d. Comme C est stable, $\alpha_1,\alpha_2 < 0$ et donc $\lim_{t\to+\infty} e^{\alpha_i t} = 0$ pour $i = 1, 2$. Donc par combinaison linéaire chaque composante de X est de limite nulle en $+\infty$. Ceci étant vrai pour toute solution X de (S), on peut finalement conclure que $\boxed{\text{le système } (S) \text{ est stable.}}$