CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

On s'intéresse ici à des suites et séries de fonctions en liaison avec des intégrales.

Dans la **partie I**, on calcule indépendamment deux intégrales particulières (les questions 1 et 2 pour l'une, la question 3 pour l'autre) qui interviennent dans les **parties II** et **III**. Les **parties II** et **III** sont indépendantes.

Partie I : calculs préliminaires

I - 1.

I - 1.1.

Justifier l'existence de l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

I - 1.2.

Pour tout $A > 0$, justifier l'existence de l'intégrale $D(A) = \displaystyle\int_0^{A} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

I - 1.3.

Grâce à une intégration par parties, prouver que $D(A)$ a une limite (réelle) quand A tend vers $+\infty$, égale à K. C'est-à-dire que : $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} D(A)$.

I - 2.

I - 2.1.

Justifier que l'application $L : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

I - 2.2.

Montrer que, pour tout réel $a > 0$, l'application L est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[a, +\infty[$.
Etablir ensuite que l'application L est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

I - 2.3.

Justifier que les fonctions $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t}$ sont bornées sur $]0,+\infty[$.
Etablir alors que les fonctions $x \mapsto |xL'(x)|$ et $x \mapsto |xL(x)|$ sont majorées sur $\mathbb{R}_+^*$.
En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} L'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} L(x) = 0$.

I - 2.4.

Pour tout réel $x > 0$, exprimer $L''(x)$ sans utiliser d'intégrale.
On pourra remarquer que $\cos(t) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{it})$.

I - 2.5.

En déduire $L'(x)$ pour $x > 0$, puis $L(x)$ pour $x\geqslant 0$. Conclure que $K = \dfrac{\pi}{2}\cdot$

I - 3.

I - 3.1.

Justifier que la fonction $u \mapsto \dfrac{\ln(u)}{u-1}$ est intégrable sur $]0,1[$.

I - 3.2.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^1 u^k \ln(u)\,\mathrm{d}u\cdot$

I - 3.3.

Grâce à un développement en série de $\dfrac{1}{1-u}$ pour $u \in]0,1[$ et en précisant le théorème utilisé, justifier que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}\cdot$

Par ailleurs, on donne sans avoir à le justifier : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot$

Partie II : étude de quelques suites d'intégrales

II - 1.

Rappeler avec précision le théorème de convergence dominée.

II - 2.

II - 2.1. On considère ici une application continue $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

II - 2.2. On suppose ici de plus que $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1]$.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$. On pourra transformer nI_n grâce à un changement de variable.

II - 2.3. Application 1.

Déterminer un équivalent quand $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 \sin(t^n)\,\mathrm{d}t$ (grâce à une intégrale).

II - 3. On considère maintenant que $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une application continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

II - 3.1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Grâce à un changement de variable approprié, justifier l'existence de $A_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t^n)\,\mathrm{d}t$.

II - 3.2.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nA_n$ (grâce à une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer).

II - 4.

II - 4.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}, n\geqslant 2$ et tout $A > 1$, on pose $C_n(A) = \displaystyle\int_1^{A} \sin(t^n)\,\mathrm{d}t$.

Grâce à un changement de variable et une intégration par parties, exprimer $C_n(A)$ en fonction de $\displaystyle\int_1^{A^n} \frac{1-\cos(u)}{u^2} u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u$ et de A.

II - 4.2.

En déduire que $C_n(A)$ a une limite quand $A \to +\infty$, prouvant l'existence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^n)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n\geqslant 2$.

II - 4.3. Application 2.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \int_0^{+\infty} \sin(t^n)\,\mathrm{d}t$ grâce à K calculée en **I-2.5** .

Partie III : étude de séries de fonctions

III - 1. Un premier exemple.

III - 1.1.

Pour tout $x \in]-1, 1[$, calculer $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ ainsi que $F'(x)$.

III - 1.2.

Déterminer $\displaystyle\lim_{\substack{x<1\\x\to1}} F(x)$, $\displaystyle\lim_{\substack{x<1\\x\to1}} (1-x)F(x)$, $\displaystyle\lim_{\substack{x<1\\x\to1}} (1-x)F'(x)$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x<1\\x\to1}} (1-x)^2F'(x)$.

III - 2. Un deuxième exemple.

Dans cette question, pour tout $x \in]-1, 1[$, on pose cette fois : $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$.

III - 2.1.

Soit $a \in]0, 1[$. Prouver la convergence normale de cette série de fonctions sur le segment $[-a, a]$. En déduire que F est définie et continue sur $]-1, 1[$.

III - 2.2.

Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1-x^n}{1-x} \leqslant n$.

En déduire $\lim\limits_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} F(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} (1-x)F(x)$.

III - 3. Dans cette question, f est une application réelle continue et croissante sur $[0,1[$ avec $f(0)=0$ et telle que $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ soit intégrable sur $]0,1[$.

Soit $x \in]0,1[$.

III - 3.1.

Justifier l'existence de $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x^t)\,\mathrm{d}t$ et l'égalité $G(x) = -\dfrac{1}{\ln(x)} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$.

III - 3.2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'encadrement :

$$\int_n^{n+1} f(x^t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(x^n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x^t)\,\mathrm{d}t.$$

III - 3.3.

En déduire l'existence de $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(x^n)$, ainsi qu'un encadrement de $F(x)$ par deux intégrales dépendant de x.

III - 3.4.

Conclure avec soin que : $\lim\limits_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} (1-x)F(x) = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$.

III - 4. Un dernier exemple.

Pour tout $x \in]-1,1[$, on pose enfin cette fois : $F(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-x^n)$.

III - 4.1.

Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et exprimer sa dérivée sous la forme d'une série de fonctions.

III - 4.2.

Grâce à **III - 3.4.**, montrer que $\lim\limits_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} (1-x)F(x) = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\ln(u)}{u-1}\,\mathrm{d}u$ étudiée en **I - 3.**

III - 4.3.

Par une méthode similaire à celle de **III - 3.**, montrer que :

$$\lim_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} \left((1-x)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} \right) = \int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1}\,\mathrm{d}u.$$

En déduire $\lim\limits_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} \big((1-x)^2 F'(x)\big)$.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 13 1164 – D'après documents fournis