UN CORRIGE

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES - SESSION 2013

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

MATHEMATIQUES 2

Partie I : calculs préliminaires

I - 1.

I - 1.1. La fonction $k\colon t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue. Elle est prolongeable par continuité en zéro par la valeur $\frac{1}{2}$ car $1-\cos(t) \sim \frac{t^2}{2}$ quand $t \to 0$, donc $\int_0^1 k(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Elle vérifie $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leqslant k(t) \leqslant \frac{2}{t^2}$, donc $\int_1^{+\infty} k(t)\,\mathrm{d}t$ converge, par majoration de fonctions positives et convergence de l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$. On conclut à la convergence de l'intégrale

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Comme k est positive, cela revient à affirmer que k est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

I - 1.2. Soit $A > 0$. La fonction sinus cardinal $t \in]0, A] \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue et est prolongeable par continuité en zéro par la valeur 1 car $\sin(t) \sim t$ quand $t \to 0$. On conclut à la convergence de

$$D(A) = \int_0^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

I - 1.3. Soit A et ε deux nombres réels tels que $0 < \varepsilon < A$. On réalise l'intégration par parties sur le segment $[\varepsilon, A]$ où les fonctions $u\colon t \mapsto 1-\cos(t)$ et $v\colon t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\int_\varepsilon^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^A u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1-\cos(A)}{A} - \frac{1-\cos(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_\varepsilon^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

L'équivalent $1-\cos(\varepsilon) \sim \frac{\varepsilon^2}{2}$ montre que $\lim(\frac{1-\cos(\varepsilon)}{\varepsilon}) = 0$ quand $\varepsilon \to 0$, et la majoration $|\frac{1-\cos(A)}{A}| \leqslant \frac{2}{A}$ montre que $\lim(\frac{1-\cos(A)}{A}) = 0$ quand $A \to +\infty$. On en déduit d'abord (en faisant tendre ε vers zéro) que

$$D(A) = \frac{1-\cos(A)}{A} + \int_\varepsilon^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

et ensuite (en faisant tendre A vers l'infini) que

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} D(A).$$

I - 2.

I - 2.1. On pose

$$\ell\colon (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-tx}.$$

On vérifie les trois hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètre (qui est aussi, rappelons le, un théorème d'existence) :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, l'application $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ell(x,t)$ est continue par morceaux (continue en fait).
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \ell(x,t)$ est continue.
- On a la domination $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* |\ell(x,t)| \leqslant k(t)$, où la fonction k, définie à la première question, est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (elle est bien indépendante de x).

On conclut alors que l'application

$$L\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-tx}\,\mathrm{d}t$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

I - 2.2. On vérifie les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètres, ou théorème de Leibniz.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \ell(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ (c'est évident).
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, les deux fonctions $t \mapsto \frac{\partial \ell}{\partial x}(x,t) = -\frac{1-\cos(t)}{t}e^{-tx}$ et $t \mapsto \frac{\partial^2 \ell}{\partial x^2}(x,t) = (1-\cos(t))e^{-tx}$ sont continues par morceaux (c'est évident).
- On dispose des dominations

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R}_+^* \mapsto \left|\frac{\partial \ell}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \phi_a(t) := \frac{1-\cos(t)}{t}e^{-ta},$$
$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R}_+^* \mapsto \left|\frac{\partial^2 \ell}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \psi_a(t) := 2e^{-ta},$$

  où les fonctions ϕ_a et ψ_a sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ (et indépendantes de x). En effet, ϕ_a est prolongeable par continuité en zéro par la valeur zéro et et dominée par la fonction intégrable $t \mapsto e^{-ta}$ au voisinage de l'infini, et ψ_a est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après le cours.

On conclut que L est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[a,+\infty[$, et qu'on a les formules suivantes, valables pour tout $x \in [a,+\infty[$:

$$L'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t}e^{-tx}\,\mathrm{d}t,$$
$$L''(x) = \int_0^{+\infty} (1-\cos(t))e^{-tx}\,\mathrm{d}t.$$

L'appartenance à la classe $\mathcal{C}^2$ étant une propriété locale (cela signifie que la continuité et la dérivabilité sur un intervalle sont définies par la continuité et la dérivabilité en tout point de l'intervalle), on en déduit que l'application L est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$, et que les formules ci-dessus restent valable pour tout $x \in]0,+\infty[$.

I - 2.3. Ces deux fonctions ont pour limite zéro en $+\infty$ (vu plus haut) donc elles sont bornées (par exemple par 1) dans un voisinage de $+\infty$, disons sur $[b,+\infty[$. Par ailleurs, elle sont prolongeables par continuité en zéro (vu plus haut), donc les prolongements correspondants, continus sur le *segment* $[0,b]$, y sont bornés. On en déduit que les fonctions $t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ et $t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t}$ sont bornées sur $]0,+\infty[$. On note M et M' des réels positifs tels que

$$\forall x \in]0,+\infty[,\quad \left|\frac{1-\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant M,$$
$$\forall x \in]0,+\infty[,\quad \left|\frac{1-\cos(t)}{t}\right| \leqslant M'.$$

Par inégalité triangulaire, et grâce à la valeur $\int_0^{+\infty} e^{-tx}\,\mathrm{d}t = [-\frac{e^{-tx}}{x}]_{t=0}^{+\infty} = \frac{1}{x}$, on en déduit que

$$\forall x \in]0,+\infty[,\quad |xL(x)| \leqslant x\int_0^{+\infty} Me^{-tx}\,\mathrm{d}t = M,$$

et le même raisonnement prouve que $\forall x \in]0,+\infty[, |xL(x)| \leqslant M'$. Les majorations $\forall x \in]0,\infty[, |L(x)| \leqslant \frac{M}{x}$ et $|L'(x)| \leqslant \frac{M'}{x}$ prouvent alors que

$$\lim_{x\to+\infty} L'(x) = \lim_{x\to+\infty} L(x) = 0.$$

I - 2.4. Pour tout réel $x > 0$, on a (la convergence de chacune des intégrales écrites ci-dessous justifie le calcul) :

$$L''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,\mathrm{d}t - \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{x} + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{-x-i}\right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$

I - 2.5. D'après la formule ci-dessus, il existe une constante $c' \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in]0,+\infty[,\quad L'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c' = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + c'.$$

Comme $\lim \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$ quand $x \to +\infty$, et comme on sait que $\lim L'(x) = 0$ quand $x \to +\infty$, on en déduit que $c' = 0$, donc que

$$\forall x \in]0,+\infty[,\quad L'(x) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right).$$

On calcule ensuite une primitive de $x \mapsto \ln(x^2+1)$ par intégration par parties :

$$\int_0^x \ln(t^2+1)\,\mathrm{d}t = \big[t\ln(t^2+1)\big]_0^x - 2\int_0^x \frac{t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = x\ln(x^2+1) - 2\int_0^x \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t,$$
$$= x\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan(x).$$

On en déduit qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in\,]0,+\infty[, \quad L(x) = x\ln(x) - x - \frac{1}{2}\big(x\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan(x)\big) + c = x\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) - \arctan(x) + c.$$

Comme $x\ln(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}) = x\ln(\frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}}) = -\frac{x}{2}\ln(1+\frac{1}{x^2}) \sim -\frac{1}{2x}$ quand $x \to +\infty$, on en déduit que $\lim L(x) = -\frac{\pi}{2} + c$ quand $x \to +\infty$. Comme on sait, par ailleurs, que $\lim L(x) = 0$ quand $x \to +\infty$, on conclut que $c = \frac{\pi}{2}$, donc que

$$\forall x \in\,]0,+\infty[, \quad L(x) = -\frac{x}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2}.$$

Comme la fonction L est continue y compris en zéro, on obtient, en prenant la limite du membre de droite en zéro, que $L(0) = \frac{\pi}{2}$. En utilisant le définition de la fonction L, on trouve finalement que

$$L(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = K = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} = \frac{\pi}{2}.$$

I - 3.

I - 3.1. La fonction $m\colon u \in\,]0,1[\mapsto \frac{\ln(u)}{u-1} = \frac{\ln(u)-\ln(1)}{u-1}$ est continue, prolongeable par continuité en 1 par la valeur $\ln'(1) = 1$, donc intégrable sur $[\frac{1}{2},1[$, et équivalente en zéro à la fonction intégrable positive $-\ln$, donc intégrable sur $]0,\frac{1}{2}]$.

On en déduit que m est intégrable sur $]0,1[$.

I - 3.2. La fonction $m_k\colon u \in\,]0,1] \mapsto u^k\ln(u)$ est continue et est prolongeable par continuité en zéro par la valeur zéro lorsque $n \geqslant 1$, dont intégrable sur $]0,1]$ lorsque $n \geqslant 1$. Lorsque $n = 0$, il s'agit de la fonction $m_0 = \ln$, réputée intégrable sur $]0,1]$. On calcule par intégration par parties (les fonctions en jeu sont bien de classe $\mathcal{C}^1$) : pour tout $\varepsilon \in\,]0,1]$,

$$\int_\varepsilon^1 u^k\ln(u)\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^{k+1}\ln(u)}{k+1}\right]_\varepsilon^1 - \frac{1}{k+1}\int_\varepsilon^1 u^k\,\mathrm{d}u = \frac{\varepsilon^{k+1}\ln(\varepsilon)}{k+1} - \frac{1-\varepsilon^{k+1}}{(k+1)^2}.$$

En faisant tendre ε vers zéro, on obtient

$$\int_0^1 u^k\ln(u)\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{(k+1)^2}.$$

I - 3.3. La somme de la série géométrique $\forall u \in\,]-1,1[,\ \frac{1}{1-u} = \sum_{k=0}^{+\infty} u^k$ permet d'écrire que

$$\forall u \in\,]0,1[, \quad m(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} m_k(u), \quad \text{où} \quad m_k(u) = u^k\ln(u).$$

En d'autres termes, on vient de vérifier la première hypothèse du théorème de permutation série-intégrale sur un intervalle quelconque, et on vérifie les autres dans la foulée.

- La série de fonctions continues (par morceaux) $\sum_{k\geqslant 0} m_k$ converge simplement vers la fonction m.
- La fonction m est continue (par morceaux)
- La série numérique de terme général $\int_0^1 |m_k(u)|\,\mathrm{d}u$ converge, puisqu'il s'agit de la série de terme général $\frac{1}{(k+1)^2}$.

Alors m est intégrable sur $]0,1[$ (on le savait déjà) et on a l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} m_k(u)\right)\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 m_k(u)\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)^2}.$$

Partie II : étude de quelques suites d'intégrales

II - 1. Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux, définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans le corps $\mathbb{K}$ des réels ou des complexes. On suppose que :

- La suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f\colon I \to \mathbb{K}$
- La fonction f est continue par morceaux.
- Il existe une fonction φ continue par morceaux de I dans $\mathbb{R}_+$, intégrable sur I, telle que (hypothèse de domination) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in I, \quad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t).$$

Alors f et les f_n sont intégrables sur I, la suite de terme général $\int_I f_n$ converge, et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f.$$

II - 2.

II - 2.1. On applique le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions continues (f_n) définies par $\forall t \in [0,1[,\ f_n(t) = f(t^n)$.

- La suite (f_n) converge simplement vers la fonction constante $f\colon t \in [0,1[\mapsto f(0)$
- La fonction f est continue par morceaux.
- Comme f est continue sur le segment $[0,1]$, elle y est bornée. Comme $t^n \in [0,1[$ lorsque $t \in [0,1[$, la fonction $\varphi = \|f\|_{\infty,[0,1]}$ continue par morceaux et évidemment intégrable sur $[0,1[$, vérifie bien l'hypothèse de domination $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in I$, $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$.

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 f(0)\,\mathrm{d}t = f(0).$$

II - 2.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $\theta\colon u \in]0,1] \mapsto u^{1/n} \in]0,1]$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,1]$ sur lui-même. Comme la fonction f_n est intégrable sur $]0,1]$ (puisqu'elle est continue sur le segment $[0,1]$), il en est de même de la fonction $(f\circ\theta)\theta'$, et on a $\int_0^1 f_n = \int_0^1 (f\circ\theta)|\theta'|$, c'est-à-dire

$$\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 f(u)u^{-1+1/n}\,\mathrm{d}u, \quad \text{ou encore} \quad nI_n = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}u^{1/n}\,\mathrm{d}u.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n\colon u \in]0,1] \mapsto \frac{f(u)}{u}u^{1/n}$, ce qui définit une suite de fonctions continues à valeurs réelles, et on lui applique le théorème de convergence dominée.

- Comme $u^{1/n} = \exp(\frac{\ln(u)}{n})$ tend vers 1 quand $n \to +\infty$, et ceci pour tout u fixé dans $]0,1]$, la suite (g_n) converge simplement vers la fonction $g\colon u \mapsto \frac{f(u)}{u}$ sur $]0,1]$.
- La fonction g est continue par morceaux.
- Comme $u^{1/n} \leqslant 1$ pour tout $u \in]0,1]$, on dispose de l'hypothèse de domination $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|g_n| \leqslant |g|$, avec $|g|$ continue sur $]0,1]$ et intégrable par hypothèse.

On conclut que

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

II - 2.3. La question précédente (applicable puisque le sinus est une fonctions continue sur $\mathbb{R}_+$ et que $\int_0^1 \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ converge) donne

$$\int_0^1 \sin(t^n)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

II - 3.

II - 3.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $\theta\colon u \in [1,+\infty[\mapsto u^{1/n} \in [1,+\infty[$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $[1,+\infty[$ sur lui-même. Alors l'intégrabilité de f_n sur $[1,+\infty[$ est équivalente à l'intégrabilité de $u \mapsto (f\circ\theta)(u)\theta'(u) = \frac{1}{n}f(u)u^{-1+1/n}$ sur $[1,+\infty[$. Comme l'exposant $-1+\frac{1}{n}$ est négatif, on a

$$\forall u \in [1,+\infty[, \quad \left|f(u)u^{-1+1/n}\right| \leqslant |f(u)|,$$

ce qui prouve l'intégrabilité de $(f\circ\theta)\theta'$, donc la convergence de A_n et l'égalité

$$nA_n = n\int_1^{+\infty} f(t^n)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} f(u)u^{-1+1/n}\,\mathrm{d}u.$$

II - 3.2. Comme $|g(u)| = |\frac{f(u)}{u}| \leqslant |f(u)|$ avec f intégrable sur $[1, +\infty[$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions k_n définies par $\forall u \in [1, +\infty[, k_n(u) = f(u)u^{-1+1/n}$ (les hypothèses faibles sont évidemment satisfaites, et la domination est $\forall n \in \mathbb{N}^*, |k_n| \leqslant |g|$). On conclut que

$$\lim_{n\to+\infty} nA_n = \int_1^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

II - 4.
II - 4.1. Comme l'intégrale $\int_1^A \sin(t^n)\,\mathrm{d}t$ est celle d'une fonction continue sur un segment, il suffit de vérifier que le changement de variable $u \in [1, A^n] \mapsto u^{1/n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui est clair, et on obtient

$$C_n(A) = \frac{1}{n}\int_1^{A^n} \sin(u)u^{-1+1/n}\,\mathrm{d}u.$$

On intègre ensuite par parties en dérivant la fonction puissance et en intégrant la fonction trigonométrique (on choisit $u \mapsto 1 - \cos(u)$ comme primitive) :

$$\begin{aligned} C_n(A) &= \frac{1}{n}\left(\Big[(1-\cos(u))u^{-1+1/n}\Big]_1^{A^n} - \left(-1+\frac{1}{n}\right)\int_1^{A^n}(1-\cos(u))u^{-2+1/n}\,\mathrm{d}u\right), \\ &= \frac{1}{n}\left((1-\cos(A^n))\,A^{1-n} - 1 + \cos(1) + \left(1-\frac{1}{n}\right)\int_1^{A^n}\frac{1-\cos(u)}{u^2}u^{1/n}\,\mathrm{d}u\right). \end{aligned}$$

II - 4.2. Comme $n \geqslant 2$, on a $\lim[(1-\cos(A^n))A^{1-n}] = 0$ quand $A \to +\infty$. Par ailleurs, la majoration $|\frac{1-\cos(u)}{u^2}u^{1/n}| \leqslant \frac{2}{u^{2-1/n}}$ avec un exposant $2 - \frac{1}{n} \geqslant \frac{3}{2} > 1$ prouve l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$ de la fonction continue $u \mapsto \frac{1-\cos(u)}{u^2}u^{1/n}$. On conclut que $\int_1^{+\infty}\sin(t^n)\,\mathrm{d}t = \lim C_n(A)$ quand $A \to +\infty$ existe, et vaut

$$\int_1^{+\infty}\sin(t^n)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\left(-1+\cos(1)+\left(1-\frac{1}{n}\right)\int_1^{+\infty}\frac{1-\cos(u)}{u^2}u^{1/n}\,\mathrm{d}u\right).$$

II - 4.3. La même intégration par partie que ci-dessus (déjà justifiée à la question I.2), pratiquée sur le résultat de la question II-2.3, donne

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n\int_0^1\sin(t^n)\,\mathrm{d}t\right) = 1 - \cos(1) + \int_0^1\frac{1-\cos(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u.$$

On applique ensuite le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions continues $(j_n)_{n\geqslant 2}$ définies par $j_n\colon u \in [1, +\infty[\mapsto \frac{1-\cos(u)}{u^2}u^{1/n}$. Elle converge simplement sur $[1, +\infty[$ vers la fonction continue k définie à la partie I, et vérifie la domination

$$\forall n \geqslant 2, \quad \forall u \in [1, +\infty[, \quad |j_n(u)| \leqslant \psi(u) := \frac{2}{u^{3/2}},$$

où ψ est continue et intégrable sur $[1, +\infty[$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n\int_1^{+\infty}\sin(t^n)\,\mathrm{d}t\right) = -1 + \cos(1) + \int_1^{+\infty}\frac{1-\cos(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u.$$

En ajoutant les deux résultats, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n\int_0^{+\infty}\sin(t^n)\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u = K = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Partie III : étude de séries de fonctions

III - 1. Un premier exemple.
III - 1.1. Le cours dit que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad F(x) = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x},$$

et on en déduit que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad F'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

III - 1.2. A l'aide des valeurs calculées ci-dessus, on vérifie aisément que

$$\lim_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} F(x) = +\infty, \quad \lim_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} (1-x)F(x) = 1, \quad \lim_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} (1-x)F'(x) = +\infty, \quad \lim_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} (1-x)^2 F'(x) = 1.$$

III - 2. Un deuxième exemple. On note f_n la fonction définie sur $]-1,1[$ par l'expression $f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n} = \frac{1}{1-x^n} - 1$.

III - 2.1. Comme f_n est dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée $f_n' \colon x \in [0,1[\mapsto \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$, le tableau de variation de f_n sur $[-a,a]$ possède deux allures distinctes selon la parité de n (pair à gauche, impair à droite) :

x	$-a$		0		a
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$f_n(-a)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f_n(a)$

x	$-a$		0		a
$f_n'(x)$		$+$	0	$+$	
$f_n(x)$	$f_n(-a)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f_n(a)$

Dans les deux cas, on en déduit que

$$\|f_n\|_{\infty,[-a,a]} = \max(|f_n(-a)|, |f_n(a)|) \leqslant |f_n(-a)| + |f_n(a)|.$$

Comme $a \in]0,1[$, on dispose des équivalents positifs $|f_n(-a)| \sim |f_n(a)| \sim a^n$ quand $n \to +\infty$, et on conclut à la convergence normale de $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur le segment $[-a,a]$.

La convergence normale sur tout segment entraînant la convergence simple des séries de fonctions, cela assure que F est définie sur $]-1,1[$. Par ailleurs, toutes les f_n sont continues. La convergence normale sur tout segment entraînant la convergence uniforme sur tout segment des séries de fonctions, la somme F est continue sur $]-1,1[$.

III - 2.2. Il suffit de factoriser : pour tout $x \in]0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^{n-1} \leqslant n.$$

On en déduit que $\forall x \in [0,1[,\ f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n} \geqslant \frac{x^n}{n(1-x)}$, puis que

$$F(x) \geqslant \frac{1}{1-x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

En effet, on sait que $\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, donc que $\forall x \in]-1,1[,\ -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$. Il résulte alors de la minoration de $F(x)$ ci-dessus que

$$\lim_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} F(x) = \lim_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} (1-x)F(x) = +\infty.$$

III - 3. Soit $x \in]0,1[$. On pose $h \colon t \in]0,+\infty[\mapsto f(x^t)$. On remarque pour abréger les calculs qui vont suivre que $\forall u \in]0,1[,\ x^{\ln(u)/\ln(x)} = \exp(\frac{\ln(u)}{\ln(x)} \ln(x)) = \exp(\ln(u)) = u$.

III - 3.1. Comme $x \in]0,1[$, l'application $\varphi \colon u \in]0,1[\mapsto \frac{\ln(u)}{\ln(x)}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ décroissante de $]0,1[$ sur $]0,+\infty[$. Alors h est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si la fonction

$$u \in]0,1[\mapsto (h \circ \varphi)(u)|\varphi'(u)| = \frac{f(u)}{u|\ln(x)|}$$

l'est sur $]0,1[$. C'est le cas, par hypothèse, donc $G(x) = \int_0^{+\infty} f(x^t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et on a l'égalité

$$G(x) = -\frac{1}{\ln(x)} \int_0^1 \frac{f(u)}{u|\ln(x)|}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{\ln(x)} \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

III - 3.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $x \in]0,1[$ et comme f est continue et croissante, l'application $h \colon t \in]0,+\infty[\mapsto f(x^t) = f(\exp(t\ln(x)))$ est continue et décroissante, donc

$$\forall (s,t) \in [n+1,n] \times [n-1,n], \quad h(t) = f(x^t) \leqslant h(n) = f(x^n) \leqslant h(s) = f(x^s).$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_n^{n+1} f(x^t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(x^n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x^s)\,\mathrm{d}s.$$

III - 3.3. La majoration de l'encadrement ci-dessus et la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x^s)\,\mathrm{d}s$, montre, par majoration de séries à termes positifs (f est positive), que $\sum_{n\geqslant 1} f(x^n)$ converge. En utilisant cette fois l'encadrement au complet et la relation de Chasles, on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_n^{n+1} f(x^t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} f(x^t)\,\mathrm{d}t \leqslant F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(x^n) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{n-1}^{n} f(x^t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(x^t)\,\mathrm{d}t.$$

III - 3.4. L'encadrement de la question précédente s'écrit aussi, après multiplication par le nombre positif $1-x$:

$$\forall x \in]0,1[, \quad (1-x)G(x) - (1-x)\int_0^1 f(x^t)\,\mathrm{d}t \leqslant (1-x)F(x) \leqslant (1-x)G(x)$$

Or $(1-x)G(x) = -\frac{1-x}{\ln x}\int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ tend vers $\int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ quand $x\to 1$, car $\ln(x) \sim x-1$ quand $x \to 1$. Il suffit alors d'établir que $(1-x)\int_0^1 f(x^t)\,\mathrm{d}t$ tend vers zéro quand $x \to 1$ pour pouvoir conclure, par le théorème d'encadrement, que

$$\lim_{\substack{x<1\\x\to 1}} (1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Pour cela, on effectue le même changement de variable qu'à la question III-3.1, qui donne

$$(1-x)\int_0^1 f(x^t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1-x}{\ln x}\int_x^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u \underset{x\to 1}{\sim} \int_x^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Comme $\int_x^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ est un reste d'intégrale convergente, il tend vers zéro quand $x \to 1$, et la question est résolue.

III - 4. Un dernier exemple. Pour tout $x \in]-1,1[$, on pose enfin cette fois $g_n(x) = -\ln(1-x^n)$, ce qui définit une suite de fonctions de classe (au moins) $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$. On fixe $a \in]0,1[$.

III - 4.1. Comme $|g_n(x)| \sim |x^n|$ quand $n \to +\infty$, la série $\sum g_n(x)$ converge absolument , donc converge, pour tout x fixé dans $]-1,1[$, c'est-à-dire que la série de fonctions $\sum_{\geqslant 1} g_n$ converge simplement sur $]-1,1[$. Ceci montre que F est définie sur $]-1,1[$.

On calcule facilement que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= n\frac{x^{n-1}}{1-x^n},\\ g_n''(x) &= n\frac{(n-1)x^{n-2}(1-x^n)+nx^{2(n-1)}}{(1-x^n)^2} = nx^{n-2}\frac{n-1+x^n}{(1-x^n)^2}. \end{aligned}$$

Si $n \geqslant 2$, alors $n-1+x^n > 0$ sur $]-1,1[$, donc g_n'' est du signe de x^{n-2}, c'est-à-dire du signe de x^n. On démontre alors comme à la question III-2.1 que

$$\|g_n'\|_{\infty,[-a,a]} = \max(|g_n'(-a)|, |g_n'(a)|) \leqslant |g_n'(-a)| + |g_n'(a)|.$$

Comme $a \in]0,1[$, on dispose des équivalents positifs $|g_n'(-a)| \sim |g_n'(a)| \sim na^n = \mathrm{O}(\frac{1}{n^2})$ quand $n \to +\infty$, et on conclut à la convergence normale de $\sum_{n\geqslant 1} g_n'$ sur le segment $[-a,a]$, c'est-à-dire à la convergence normale de $\sum_{n\geqslant 1} g_n'$ sur tout segment de $]-1,1[$.

En vertu du théorème de dérivation des sommes de séries de fonctions, $F = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ avec

$$\forall x \in]-1,1[, \quad F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{1-x^n}.$$

III - 4.2. On applique la question III-3.4 à la fonction continue croissante $f\colon u \in [0,1[\mapsto -\ln(1-u)$ telle que $f(0)=0$, qui vérifie bien que $\int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u = -\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{\ln(v)}{v-1}\,\mathrm{d}v$ converge (on a effectué le changement de variable $v \mapsto 1-v$ de $]0,1[$, de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif de $]0,1[$ dans lui-même). On a alors

$$\lim_{\substack{x<1\\x\to 1}} (1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{\ln(v)}{v-1}\,\mathrm{d}v.$$

III - 4.3. On applique le principe suivant, caché par le découpage de la question III.3 en sous-questions : pour déterminer un équivalent d'une somme de série de fonctions $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ en une borne de son ensemble de définition, on peut encadrer cette somme entre deux intégrales, en fixant x et en remplaçant la variable entière n par une variable réelle positive t. Ceci est possible à condition que la fonction $f\colon t \mapsto u_t(x)$ ainsi obtenue soit monotone pour pouvoir appliquer les techniques de comparaison série-intégrale.

On fixe donc $x \in]0,1[$ (puisqu'on cherche un équivalent de $F(x)$ quand $x \to 1$), et on pose $f\colon t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{tx^t}{1-x^t}$ (attention : cette fonction f n'est pas l'analogue de la fonction f de la question III.3). On écrit que $f(t) = tg(h(t))$ avec $h\colon t \mapsto x^t = \exp(t\ln(x)$, de dérivée $t \mapsto (\ln x)x^t$, et $g\colon y \mapsto \frac{y}{1-y}$, de dérivée $y \mapsto \frac{1}{(1-y)^2}$. Il s'agit d'une fonction dérivable, telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f'(t) = g(h(t)) + th'(t)g'(h(t)) = \frac{x^t}{1-x^t} + \frac{t(\ln x)x^t}{(1-x^t)^2} = \frac{x^t}{(1-x^t)^2}\underbrace{\left(1 - x^t + t(\ln x)\right)}_{\varphi(t)}.$$

La fonction f' est du signe de la fonctionφ définie ci-dessus de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Cette fonction φ est dérivable avec

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi'(t) = (-\ln x)x^t + \ln x = (\ln x)(1-x^t),$$

qui est négatif, car $x \in]0,1[$. On en déduit le tableau de variation suivant :

t	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\varphi'(t)$	$-$
$\varphi(t)$	0 $\searrow$
$f'(t)$	$-$

La fonction f est donc décroissante, et la technique usuelle de comparaison série-intégrale entraîne

$$G(x) - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} \leqslant G(x) := \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{tx^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $t = \frac{\ln(u)}{\ln(x)}$ pour lequel $u = x^t$ et $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{u\ln(x)}$, déjà utilisé (et justifié) à la question III.3, donne

$$G(x) = \int_0^1 \frac{\ln(u)u}{(1-u)\ln(x)}\frac{\mathrm{d}u}{u|\ln x|} = -\frac{1}{(\ln x)^2}\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}\,\mathrm{d}u.$$

L'équivalent usuel du logarithme en 1 montre que $\lim((1-x)^2 G(x)) = \int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1}\,\mathrm{d}u$ quand $x \to 1$. Pour établir la limite souhaitée, il suffit donc de démontrer que $(1-x)^2\int_0^1 \frac{tx^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t$ tend vers zéro quand $x \to 1$. Le même changement de variable que ci-dessus montre que

$$(1-x)^2\int_0^1 \frac{tx^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t = \frac{(1-x)^2}{(\ln x)^2}\int_x^1 \frac{\ln(u)}{u-1}\,\mathrm{d}u \sim \int_x^1 \frac{\ln(u)}{u-1}\,\mathrm{d}u$$

quand $x \to 1$: cette dernière intégrale est un reste d'intégrale convergente, donc elle tend vers zéro quand $x \to 1$, ce qui achève la preuve de

$$\lim_{\substack{x<1\\x\to 1}}\left((1-x)^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{1-x^n}\right) = \int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1}\,\mathrm{d}u.$$

Comme $F'(x)$ ne diffère de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{1-x^n}$ que d'un facteur multiplicatif x (voir la question III.4.1), on a

$$\lim_{\substack{x<1\\x\to 1}}((1-x)^2F'(x)) = \int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1}\,\mathrm{d}u.$$