1 Série de fonctions

I.1. I.1.1. Soit x réel, $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{2|x|}{n^2\pi^2}$ donc $|u_n(x)| = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Puisque la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ est convergente, la série (numérique) de terme général $u_n(x)$ est absolument convergente donc convergente. Ceci étant valable pour tout réel x :

$$\boxed{\text{la série (de fonctions) } \sum u_n \text{ converge simplement sur } \mathbf{R}.}$$

I.1.2. Soit $a > 0$: pour tout $x \in [-a, a]$, $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{2|x|}{n^2\pi^2} \leqslant \dfrac{2|a|}{n^2\pi^2}$ donc

$||u_n||_{\infty,[-a,a]} \leqslant \frac{2|a|}{\pi^2}\dfrac{1}{n^2}$ donc la série de terme général $||u_n||_{\infty,[-a,a]}$ est convergente, c'est-à-dire :

$$\boxed{\text{pour tout } a > 0, \text{ la série (de fonctions) } \sum u_n \text{ converge normalement sur } [-a,a].}$$

• Avec un peu d'habitude, on peut voir qu'en choisissant x_n du type αn on obtiendra une série divergente... Par exemple, rédigeons avec $x_n = n$:

On a $|u_n(n)| = \dfrac{2}{(1+\pi^2)\,n} \leqslant \sup\limits_{x\in\mathbf{R}} |u_n(x)| = ||u_n||_{\infty,\mathbf{R}}$ et puisque la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge alors la série $\sum ||u_n||_{\infty,\mathbf{R}}$ diverge aussi (par minoration).

• Méthode plus générale : calcul de $\sum ||u_n||_{\infty,\mathbf{R}}$ par un tableau de variations :

$|u_n|$ est paire et pour $x \geqslant 0, |u_n(x)| = u_n(x) = \dfrac{2x}{x^2+n^2\pi^2}$ que l'on peut dériver :

$$u_n'(x) = \frac{2(x^2+n^2\pi^2) - 2x(2x)}{(x^2+n^2\pi^2)^2} = \frac{n^2\pi^2 - x^2}{(x^2+n^2\pi^2)^2}\ ,$$

x	0		$n\pi$		$+\infty$
$u_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$u_n(x)$	0	$\nearrow$	M_n	$\searrow$	0

.

donc $||u_n||_{\infty,\mathbf{R}} = ||u_n||_{\infty,\mathbf{R}^+} = M_n = u_n(n\pi) = \frac{1}{\pi^2}\dfrac{1}{n}$, donc la série $\sum ||u_n||_{\infty,\mathbf{R}}$ diverge :

I.1.3. Les fonctions u_n sont continues sur $\mathbf{R}$ et pour $a > 0$, la série $\sum u_n$ convergence normalement (donc uniformément) sur $[-a, a]$ donc la somme U est continue sur $[-a, a]$. Ceci étant valable pour tout $a > 0$, U est continue sur $\mathbf{R}$.

I.2. I.2.1. D'après le théorème fondamental, la primitive qui s'annule en 0 de la fonction u_n est :

$$x \mapsto \int 0xu_n(t)\,\mathrm{d}t = \int 0x\frac{2t}{t^2+n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t^2+n^2\pi^2)\Big]_0^x = \ln(x^2+n^2\pi^2) - \ln(n^2\pi^2) = \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

Comme $x \mapsto \frac{2x}{x^2+n^2\pi^2}$ est la dérivée de $x \mapsto \ln(x^2+n^2\pi^2)$ alors la primitive qui s'annule en 0 de la fonction u_n est $x \mapsto \ln(x^2+\pi^2n^2) - \ln(\pi^2n^2) = \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$.

I.2.2. Soit x réel : $0 \leqslant v_n(x)$ et $v_n(x) \sim \dfrac{x^2}{n^2\pi^2}$ donc $v_n(x) = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et donc la série $\sum v_n(x)$ est convergente.

$$\boxed{\text{La série } \sum v_n \text{ converge simplement sur } \mathbf{R}}$$

I.2.3. On vient de voir que $V = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ est définie sur $\mathbf{R}$. En particulier $V(0) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(0) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$.

Soit $a > 0$, on a vu que la série $\sum v_n' = \sum u_n$ convergait normalement sur $[-a, a]$ donc V est dérivable sur $[-a, a]$.

Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, V est dérivable sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall x \in \mathbf{R}, V'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = U(x)\,.$$

$$\boxed{V \text{ est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction } U.}$$

I.3. Soit $x \in \mathbf{R}$. $p_n(x) = x\prod\limits_{k=1}^{k=n}\left(1+\dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$. Or

$\ln\left(\prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\right)=\sum_{k=1}^{k=n}\ln\left(1+\dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\right)=\sum_{k=1}^{k=n}v_k(x)\to_{n\to+\infty}V(x)$.

Par continuité de exp *on a donc* $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\right)=\exp(V(x))$, *puis* $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n(x)=x\mathrm{e}^{V(x)}$.

$\boxed{\text{\textit{La suite} } (p_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ \textit{converge simplement sur} } \mathbf{R}, \text{ \textit{et pour} } x\in\mathbf{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty}p_n(x)=x\mathrm{e}^{V(x)}=x\exp\left(\int_0^x U(t)\ \mathrm{d}t\right).}$

2 Série de Fourier

II.1. II.1.1. La fonction g_x *est continue sur* $]-\pi,\pi[$. *Et* $\lim_{\pi^-}g_x=g_x(\pi)=\mathrm{ch}\left(\dfrac{x\pi}{\pi}\right)=\mathrm{ch}(x)$.

De plus par périodicité $\lim_{\pi^+}g_x=\lim_{-\pi^+}g_x=\mathrm{ch}\left(\dfrac{-x\pi}{\pi}\right)=\mathrm{ch}(-x)=\mathrm{ch}(x)$.

Donc g_x *est continue sur* $\mathbf{R}$ *et de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux sur* $\mathbf{R}$ *donc le théorème de la convergence normale assure que* g_x *est égale en tout point* $t\in\mathbf{R}$ *à la somme de sa série de Fourier :*

$$\forall t\in\mathbf{R},\quad g_x(t)=\frac{1}{2}a_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(x)\cos(nt)+b_n(x)\sin(nt)\right)$$

II.1.2. Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$ *et tout* $x\in\mathbf{R}$, *la fonction* g_x *est paire donc* $b_n(x)=0$.

II.1.3. $a_n(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}g_x(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}g_x(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$ *par parité.*

Si $x=0$: $a_0(0)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}1\,\mathrm{d}t=2$ *et pour* $n\in\mathbf{N}^*$, $a_n(0)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(nt)\ \mathrm{d}t=\dfrac{2}{\pi n}\left[\sin(nt)\right]_0^{\pi}=0$.

Si $x\neq 0$, *alors* $a_n(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\mathrm{ch}\left(\dfrac{xt}{\pi}\right)\cos(nt)\ \mathrm{d}t$. *On peut mener le calcul soit en introduisant des exponentielles (complexes pour* cos, *réelles pour* ch*) soit une double intégration par parties ce qui, compte-tenu des bornes, me semble préférable :*

$\frac{\pi}{2}a_n(x)=\left[\frac{\pi}{x}\mathrm{sh}(\frac{xt}{\pi})\cos(nt)\right]_0^{\pi}+n\frac{\pi}{x}\int_0^{\pi}\mathrm{sh}(\frac{xt}{\pi})\sin(nt)\,\mathrm{d}t$

$\frac{\pi}{2}a_n(x)=(-1)^n\frac{\pi}{x}\mathrm{sh}(x)+n\frac{\pi}{x}\left[\frac{\pi}{x}\mathrm{ch}(\frac{xt}{\pi})\sin(nt)\right]_0^{\pi}-n^2\frac{\pi^2}{x^2}\int_0^{\pi}\mathrm{ch}(\frac{xt}{\pi})\cos(nt)\,\mathrm{d}t$

donc $\frac{\pi}{2}a_n(x)=(-1)^n\frac{\pi}{x}\mathrm{sh}(x)-n^2\frac{\pi^2}{x^2}\frac{\pi}{2}a_n(x)$ *puis*

$$a_n(x)=(-1)^n\frac{2x}{x^2+n^2\pi^2}\mathrm{sh}(x)=(-1)^nu_n(x)\mathrm{sh}(x),\quad a_0(0)=\frac{\mathrm{sh}(x)}{x}$$

II.2. II.2.1. D'après les résultats précédents, on a pour tout $t\in\mathbf{R}$ *:*

$$g_x(t)=\frac{\mathrm{sh}(x)}{x}+\mathrm{sh}(x)\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^nu_n(x)\cos(nt)$$

Pour $t=\pi, g_x(\pi)=\mathrm{ch}(x)$ *et* $\cos(n\pi)=(-1)^n$ *donc* $\mathrm{ch}(x)=\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x}+\mathrm{sh}(x)\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ *d'où :*

$$\text{\textit{pour tout} } x\in\mathbf{R}^*,\ U(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)=\frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}-\frac{1}{x}.$$

II.2.2. $V(x)=\displaystyle\int_0^x U(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{a\to 0}\left[\ln(\mathrm{sh}(t))-\ln(t)\right]_a^x=\ln(\frac{\mathrm{sh}(x)}{x})-\lim_{a\to 0}\ln(\frac{\mathrm{sh}(a)}{a})$. *Or* $\mathrm{sh}(a)\underset{a\to 0}{\sim}a$ *donc* $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{\mathrm{sh}(a)}{a}=1$ *puis* $\lim\limits_{a\to 0}\ln(\dfrac{\mathrm{sh}(a)}{a})=0$

$$\forall x\in\mathbf{R}^*,\quad V(x)=\ln\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{x}\right)\qquad (\text{\textit{et} } V(0)=0)$$

II.2.3. Pour $x \in \mathbf{R}^*, p(x) = x\mathrm{e}^{V(x)} = x\frac{\mathrm{sh}(x)}{x}$ *donc* $p(x) = \mathrm{sh}(x)$ *ce qui, par ailleurs, est vrai également en* $x = 0$.

$$\text{pour tout } x \in \mathbf{R}, \text{ on a : } \mathrm{sh}(x) = p(x) = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

3 Intégrale à paramètre, interversion série-intégrale

III.1. III.1.1. Soit $x \in \mathbf{R}$. $\lim\limits_{t\to 0} \pi t = 0$ *et* $\lim\limits_{t\to 0} xt = 0$ *donc* $\dfrac{\sin(tx)}{\exp(\pi t) - 1} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{x \cancel{t}}{\pi \cancel{t}}$ *d'où* $\lim_{t\to 0^+} h(x,t) = \dfrac{x}{\pi}$.

III.1.2. Soit $x \in \mathbf{R}$.

- *La fonction* $t \mapsto h(x,t)$ *est continue sur* $]0, +\infty[$.
- *D'après la question précédente, on peut la prolonger par continuité en* 0 *donc elle est intégrable sur* $]0,1]$. # *faussement impropre pour la borne réelle* 0
- *au voisinage de* $+\infty, |h(x,t)| \leq \frac{1}{\exp(\pi t)-1} \underset{t\to+\infty}{\sim} \exp(-\pi t) \geqslant 0$, *or* $t \mapsto \exp(-\pi t)$ *est intégrable sur* $[1, +\infty[$ *donc* $t \mapsto h(x,t)$ *aussi.*

$$\text{pour tout } x \in \mathbf{R}, \text{ la fonction } t \mapsto h(x,t) \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[.$$

III.2. III.2.1. Pour tout $t > 0$, *la fonction* $x \mapsto \frac{\sin(tx)}{\exp(\pi t)-1}$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbf{R}$ *donc* h *possède des dérivées partielles par rapport à* x *en tout point de* $\mathbf{R} \times]0, +\infty[$ *et à tout ordre.*

- Méthode via $\sin'' = -\sin$:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = t\frac{\cos(tx)}{\exp(\pi t) - 1}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = -t^2\frac{\sin(tx)}{\exp(\pi t) - 1},$$

on en déduirait par récurrence sur p :

$$\frac{\partial^{2p} h}{\partial x^{2p}}(x,t) = (-1)^p t^{2p}\frac{\sin(tx)}{\exp(\pi t) - 1}, \quad \frac{\partial^{2p+1} h}{\partial x^{2p+1}}(x,t) = (-1)^p t^{2p+1}\frac{\cos(tx)}{\exp(\pi t) - 1}.$$

- Méthode via $\sin'(\theta) = \sin(\theta + \pi/2)$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = t\frac{\sin(tx + \frac{\pi}{2})}{\exp(\pi t) - 1}, \text{ donc par récurrence sur } n \in \mathbf{N}, \ \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t) = t^n\frac{\sin\left(tx + n\frac{\pi}{2}\right)}{\exp(\pi t) - 1}.$$

puis $\sin(\theta + 2p\frac{\pi}{2}) = \sin(\theta + p\pi) = (-1)^p \sin(\theta), \sin(\theta + (2p+1)\frac{\pi}{2}) = (-1)^p \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = (-1)^p \cos(\theta)$.

III.2.2. Soit $x \in \mathbf{R}$ *et* $n \in \mathbf{N}^*$. *(le cas* $n = 0$ *a été vu au III.1.2)) :*

- $t \mapsto \dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)$ *est continue sur* $]0, +\infty[$;
- *Je préfère éviter de séparer* n *pair/impair...*

$$\forall t > 0, \qquad 0 \leqslant \left|\frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant t^n\frac{1}{\exp(\pi t) - 1} \tag{1}$$

or $t^n\dfrac{1}{\exp(\pi t) - 1} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\pi}t^{n-1}$ *qui admet une limite finie quand* t *tend vers* 0 *car* $n \geqslant 1$, *donc* $t \mapsto t^n\dfrac{1}{\exp(\pi t) - 1}$ *est intégrable sur* $]0,1]$ *(car prolongeable par continuité en* 0*) et, par* (1), $t \mapsto \dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)$ *est intégrable sur* $]0,1]$;

- $t^n\dfrac{1}{\exp(\pi t) - 1} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^n\mathrm{e}^{-\pi t}$. *Or* $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 t^n \mathrm{e}^{-\pi t} = 0 < 1$ *(croissance comparée) donc au voisinage de* $+\infty$, *on aura* $t^2t^n\mathrm{e}^{-\pi t} \leqslant 1$ *donc* $0 \leqslant t^n\mathrm{e}^{-\pi t} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$. *L'intégrabilité de* $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ *sur* $]1, +\infty]$ *entraîne celle de* $t \mapsto t^n\dfrac{1}{\exp(\pi t) - 1}$ *et* (1) *celle* $t \mapsto \dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)$

$$\text{la fonction } t \mapsto \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t) \text{ est continue et intégrable sur }]0, +\infty[.$$

III.3. On applique le théorème de dérivation à $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h(x,t)\,\mathrm{d}t$

- *On a vu que* f *était définie sur* $\mathbf{R}$ *(cf III.1.2)* ;

- *que h admettait à tout ordre des dérivées partielles par rapport à x et que $t \mapsto \dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)$ étaient intégrables sur $]0,+\infty[$ (cf III.2)*
- *reste la domination : On a en fait démontré que $t \mapsto t^n \dfrac{1}{\exp(\pi t)-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que relation (1) est valable pour pout réel x et tout $n \in \mathbf{N}^*$ ce qui permet d'appliquer le théorème du cours.*

Donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $m \in \mathbf{N}$, on a :

$$f^{(2m)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^m t^{2m}\sin(tx)}{\exp(\pi t)-1}\,\mathrm{d}t \text{ et } f^{(2m+1)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^m t^{2m+1}\cos(tx)}{\exp(\pi t)-1}\,\mathrm{d}t.$$

Remarque : y compris pour $f^{(0)} = f$.

III.4. III.4.1. Archi classique : somme d'une série géométrique avec $q = \mathrm{e}^{-\pi t} \in [\,0,1\,[$:

Pour $t>0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-n\pi t) = \exp(-\pi t)\frac{1}{1-\exp(-\pi t)} = \frac{\exp(\pi t)}{\exp(\pi t)}\frac{1}{\exp(\pi t)-1} = \frac{1}{\exp(\pi t)-1}.$

III.4.2. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $x \in \mathbf{R}$, la fonction $t \mapsto \exp(-n\pi t)\sin(tx)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et dominée par $t \mapsto \exp(-n\pi t)$ qui est intégrable sur $[0,+\infty[$:

la fonction $t \mapsto \exp(-n\pi t)\sin(tx)$ est est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Pour le calcul on peut faire une double intégration par parties ou utiliser les complexes :

Pour $b \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^b \exp(-n\pi t)\exp(\mathrm{i}tx)\,\mathrm{d}t = \int_0^b \exp([-n\pi+\mathrm{i}x]t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{-n\pi+\mathrm{i}x}\left[\exp([-n\pi+\mathrm{i}x]t)\right]_0^b$

Or $|\exp([-n\pi+\mathrm{i}x]b)| = |\exp(-n\pi b)\exp(\mathrm{i}xb)| = \exp(-n\pi b)\times 1 \to_{b\to+\infty} 0$ *donc*

$$\int_0^{+\infty} \exp(-n\pi t)\exp(\mathrm{i}tx)\,\mathrm{d}t = \lim_{t\to+\infty}\int_0^b \exp(-n\pi t)\exp(\mathrm{i}tx)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{-n\pi+\mathrm{i}x}(0-1) = \frac{n\pi+\mathrm{i}x}{(n\pi)^2+x^2}$$

D'où en prenant la partie imaginaire :

$$\int_0^{+\infty} \exp(-n\pi t)\sin(tx)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}\exp(-n\pi t)\exp(\mathrm{i}tx)t\right) = \frac{x}{(n\pi)^2+x^2} = \frac{1}{2}u_n(x).$$

III.4.3. « Remarque » : l'énoncé revient aux sommes partielles car on ne pouvait pas appliquer le théorème du cours...

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout $x \in \mathbf{R}$, pour tout $t>0$ (pour que $q = \mathrm{e}^{-\pi t} \neq 1$) :

$$h_n(x,t) = \sum_{k=1}^{k=n} [\exp(-\pi t)]^k \sin(tx) = \exp(-\pi t)\frac{1-\exp(-n\pi t)}{1-\exp(-\pi t)}\sin(tx) = (1-\exp(-n\pi t))\frac{\sin(tx)}{\mathrm{e}^{\pi t}-1}.$$

On va appliquer le théorème de convergence dominée (x est fixé) :

- (convergence simple) *Pour tout $t>0, h_n(x,t) \to_{n\to+\infty} h(x,t)$ et on constate que la limite simple $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $]\,0,+\infty\,[$;*
- *pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $t \mapsto h_n(x,t)$ est intégrable sur $]\,0,+\infty\,[$;*
- (domination) *Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:*

$$\forall t>0, \quad |h_n(x,t)| = \left|(1-\exp(-n\pi t))\frac{\sin(tx)}{\mathrm{e}^{\pi t}-1}\right| \leqslant \frac{|\sin(tx)|}{\mathrm{e}^{\pi t}-1}$$

et on a vu que la fonction $t \mapsto |h(x,t)|$ était intégrable sur $]\,0,+\infty\,[$

donc d'après le théorème de convergence dominée :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} h(x,t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} h_n(x,t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{k=1}^{k=n}\exp(-k\pi t)\sin(tx)\,\mathrm{d}t$$

Or par linéarité

$$\int_0^{+\infty}\sum_{k=1}^{k=n}\exp(-k\pi t)\sin(tx)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{k=n}\int_0^{+\infty}\exp(-k\pi t)\sin(tx)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{2}u_k(x)$$

pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2}U(x)$.